Ejercicio 6. (Ej. 4 del 2^{do} examen del curso 2001)
Hallar la cantidad n de palabras de 1 a 5 letras que se pueden formar usando las letras de la palabra *CASAS*. (Por ejemplo *C* y *AA* son dos palabras posibles, pero *CAC* no lo es).

Dividamos en casos:

1) Palabras de cinco letras: $\frac{5!}{2!2!} = 30$

CAS|AS → CAS
CAS|AS ← CAS
CASSA

2) Palabras de cuatro letras:

$CASA\cancel{S} \longrightarrow CASA$

$CASAS \longleftarrow CASA$

Observación: hay igual cantidad de palabras de cuatro y cinco letras.

C A S A   A S A S

- Se repite A y S $\frac{4!}{2!2!} = 6$

ó

- Se repite solo A : se repite sólo S

$\frac{4!}{2} + \frac{4!}{2} = 2 \cdot \frac{4!}{2!} = 4!$

Regla de la suma: hay 30 pal. de long. 4.

3) Palabras de tres letras

- Tres letras distintas: $3! = 6$

ó

- Dos letras iguales: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

formas de elegir 2 letras =

formas de elegir la letra que falta

pos. posibles de la letra diferente

A A S	A A C	S S C	S S A
A S A	A C A	S C S	S A S
S A A	C A A	C S S	A S S
A A S	A A C	S S C	S S A

↑A↑A↑

Otra forma: si elijo 2 letras = y una distinta ⇒ hay $\frac{3!}{2!}$ palabras con esas letras.

En total hay $4 \cdot 3!/2! = 12$ formas.

Regla de la suma: hay 18 palabras de tres letras

4) Palabras de dos letras:

AS
SA
CS
SC
AC
CA

· 2 letras = : 2

· 2 letras ≠ : 3.2 = 6

Hay 8.

5) Palabras de una letra: 3

$$\text{Total}: \underbrace{30}_{1)} + \underbrace{30}_{2)} + \underbrace{18}_{3)} + \underbrace{8}_{4)} + \underbrace{3}_{5)} = 89.$$

Ejercicio 5.

(a) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de $(x^5 + x - 1)^{10}$.

(b) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio $(2x + 4y + 2z + 5)^{14}$.

(a) $(x^a)^b = x^{a.b}$ $\qquad x^a . x^b = x^{a+b}$

F. Multinomio:

Para n y t positivos, repasar la demostración (hay al menos dos posibles demostraciones) que el coeficiente de $x_1^{n_1}\ x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$ en $(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n$ es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_t!}$$

con $n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$.

$$(x_1+x_2+\dots+x_t)^n = \sum_{n_1+\dots+n_t=n} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_t!}\, x_1^{n_1}\dots x_t^{n_t}$$

supongamos $t=2$: $\displaystyle (x_1+x_2)^n = \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{n_1!\,n_2!}\, x_1^{n_1} x_2^{n_2}$

$n_2 = n - n_1$

$$\sum_{n_1} \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\, x_1^{n_1} x_2^{n-n_1}$$

$$\left(\underbrace{x^5}_{x_1}+\underbrace{x}_{x_2}\underbrace{-1}_{x_3}\right)^{10}=\sum_{n_1+n_2+n_3=10}\frac{10!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}\underbrace{(x^5)^{n_1}(x)^{n_2}}_{x^{5n_1+n_2}}\,(-1)^{n_3}$$

Queremos los coefs. de los t. grado 5 : $5n_1+n_2=5$

$n_1=1 \quad n_2=0 \quad n_3=9$

$n_1=0 \quad n_2=5 \quad n_3=5$

$$\Rightarrow (x^5+x-1)=\frac{10!}{1!\,0!\,9!}(-1)^9x^5+\frac{10!}{0!\,5!\,5!}(-1)^5x^5+\ldots(\text{grado}\neq 5)$$

10 $\quad C^{10}_5$

$(x^5+x-1)\,(x^5+x-1)\ldots(x^5+x-1)$

El coeficiente es: $-\left(10+C^{10}_5\right)=-262$ $\qquad \frac{\cancel{10}^{2}\cdot \cancel{9}^{3}\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot 6}{\cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1}$

(b) coef de $x^{1}y^{3}z^{5}$ en $\left(\underbrace{2x}_{x_1}+\underbrace{4y}_{x_2}+\underbrace{2z}_{x_3}+\underbrace{5}_{x_4}\right)^{14}$

$(ab)^n=a^nb^n$

$$(2x+4y+2z+5)^{14}=\sum_{n_1+n_2+n_3+n_4=14}\frac{14!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\,n_4!}\underbrace{(2x)^{n_1}(4y)^{n_2}(2z)^{n_3}(5)^{n_4}}_{2^{n_1}\cdot 4^{n_2}\cdot 2^{n_3}5^{n_4}\cdot x^{n_1}y^{n_2}z^{n_3}}$$

Queremos calcular el coef para $n_1=1 \quad n_2=3 \quad n_3=5 \quad n_4=5$

el coef es: $\frac{14!}{1!\,3!\,5!\,5!}\cdot 2^1\cdot 4^3\cdot 2^5\cdot 5^5$