

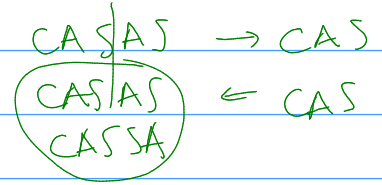
Ejercicio 6. (Ej. 4 del 2^{do} examen del curso 2001)

Hallar la cantidad n de palabras de 1 a 5 letras que se pueden formar usando las letras de la palabra CASAS. (Por ejemplo C y AA son dos palabras posibles, pero CAC no lo es).

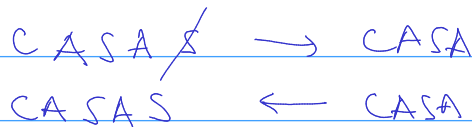
Dividamos en casos:

1) Palabras de cinco letras:

$$\frac{5!}{2!2!} = 30$$



2) Palabras de cuatro letras:



Observación: hay igual cantidad de palabras de cuatro y cinco letras.

C A S A

A S A S

• Se repite A y S

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

• se repite solo A

$$\frac{4!}{2}$$

• se repite solo S

$$+$$

$$\frac{4!}{2}$$

$$= 2 \cdot \frac{4!}{2} = 4!$$

Regla de la suma: hay 30 pal. de long. 4.

3) Palabras de tres letras

• Tres letras distintas: $3! = 6$

formas de elegir 1^a letra que falta

• Dos letras iguales:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

formas de elegir 2 letras =

A A S	A A C	S S C	S S A
A S A	A C A	S C S	S A S
S A A	C A A	C S S	A S S
A A S	A A C	S S C	S S A

↑ A ↑ A ↑

Otra forma: si elije 2 letras = y una distinta => hay $\frac{3!}{2!}$ palabras con esas letras.

En total hay $4 \cdot \frac{3!}{2!} = 12$ formas.

Regla de la suma: hay 18 palabras de tres letras

4) Palabras de dos letras:

$$\cdot 2 \text{ letras} = : 2$$

$$\cdot 2 \text{ letras } \neq : 3 \cdot 2 = 6$$

AS
SA
LS
SC
AC
CA

Hay 8.

5) Palabras de una letra: 3

$$\text{Total: } \underbrace{30}_{1)} + \underbrace{30}_{2)} + \underbrace{18}_{3)} + \underbrace{8}_{4)} + \underbrace{3}_{5)} = 89$$

Ejercicio 5.

(a) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de $(x^5 + x - 1)^{10}$.

(b) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio $(2x + 4y + 2z + 5)^{14}$.

$$(a) (x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

F. Multinomio:

Para n y t positivos, repasar la demostración (hay al menos dos posibles demostraciones) que el coeficiente de $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$ en $(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n$ es

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_t!}$$

con $n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$.

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_t = n} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_t!} x_1^{n_1} \dots x_t^{n_t}$$

$$\text{supongamos } t=2: (x_1 + x_2)^n = \sum_{n_1 + n_2 = n} \frac{n!}{n_1! n_2!} x_1^{n_1} x_2^{n_2}$$

$$n_2 = n - n_1$$
$$\sum_{n_1} \frac{n!}{n_1! (n-n_1)!} x_1^{n_1} x_2^{n-n_1}$$

$$(x^5 + x - 1)^{10} = \sum_{n_1+n_2+n_3=10} \frac{10!}{n_1!n_2!n_3!} (x^5)^{n_1} (x)^{n_2} (-1)^{n_3}$$

$\underbrace{\quad}_{x_1} \quad \underbrace{\quad}_{x_2} \quad \underbrace{\quad}_{x_3}$

$x^{5n_1+n_2} \cdot (-1)^{n_3}$

Queremos los coef. de los t. grados : $5n_1+n_2=5$

$$n_1=1 \quad n_2=0 \quad n_3=9$$

$$n_1=0 \quad n_2=5 \quad n_3=5$$

$$\Rightarrow (x^5 + x - 1) = \frac{10!}{1!0!9!} (-1)^9 x^5 + \frac{10!}{0!5!5!} (-1)^5 x^5 + \dots \text{ (grado } \neq 5)$$

C_{10}^5

$$(x^5 + x - 1) (x^5 + x - 1) \dots (x^5 + x - 1)$$

El coeficiente es: $-(10 + C_{10}^5) = -262$

$$\frac{\cancel{10} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}$$

(b) coef de $x^1 y^3 z^5$ en $(2x + 4y + 2z + 5)^{14}$

$\underbrace{\quad}_{x_1} \quad \underbrace{\quad}_{x_2} \quad \underbrace{\quad}_{x_3} \quad \underbrace{\quad}_{x_4}$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$(2x + 4y + 2z + 5)^{14} = \sum_{n_1+n_2+n_3+n_4=14} \frac{14!}{n_1!n_2!n_3!n_4!} (2x)^{n_1} (4y)^{n_2} (2z)^{n_3} (5)^{n_4}$$

$2^{n_1} \cdot 4^{n_2} \cdot 2^{n_3} \cdot 5^{n_4} \cdot x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3}$

Queremos calcular el coef para $n_1=1 \quad n_2=3 \quad n_3=5 \quad n_4=5$

el coef es: $\frac{14!}{1!3!5!5!} \cdot 2^1 \cdot 4^3 \cdot 2^5 \cdot 5^5$