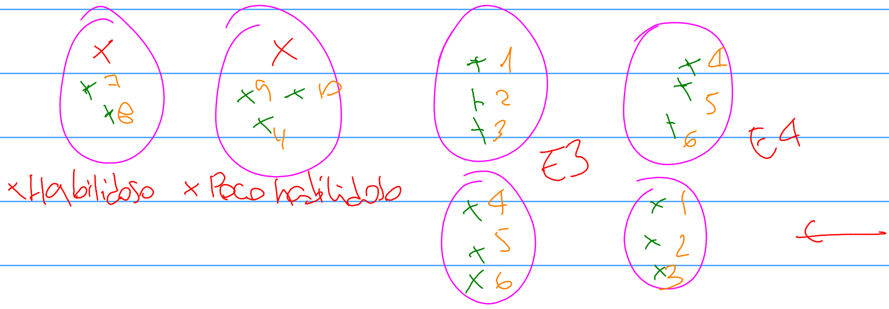
Ejercicio 1. En una playa se juntan 13 chicos y deciden hacer 4 equipos para jugar al voleibol, para ello hacer tres equipos de 3 jugadores y uno de 4. Entre los chicos se encuentra uno sumamente habilidoso y otro que es muy, pero muy poco habilidoso (antes se le decía "es un chambonazo"). Los restantes 11 jugadores son de nivel medio en este deporte. Para equiparar, al habilidoso lo colocan en uno de los equipos de 3 jugadores y al poco habilidoso en el equipo de 4 jugadores.
¿De cuántas formas se pueden armar los equipos?



$$\binom{11}{2}\cdot\binom{9}{3}\cdot\left(\frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}}{2}\right)$$

Formas de comp eq Hab.

F. elegir eq poco habilidoso

los dos últimos eq. no son distinguibles

Ejercicio 2. Para una selección de fútbol, fueron convocados 2 goleros, 6 zagueros, 7 mediocampistas y 4 atacantes. ¿De cuántos modos es posible formar una selección con un golero, 4 zagueros, 4 mediocampistas y 2 atacantes?

$C^2_1 \cdot C^6_4 \cdot C^7_4 \cdot C^4_2$

un golero · 4 zagueros · 4 medios · 2 atacantes

$\Rightarrow$ Por la regla del producto hay $C^2_1 \cdot C^6_4 \cdot C^7_4 \cdot C^4_2$ formas.

Ejercicio 3.

(a) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$.

(b) ¿Cuántas soluciones hay si se reemplaza el signo $=$ por el signo $<$?
O sea: hallar la cantidad de soluciones naturales de la inecuación $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 < 4$.

(c) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ tal que se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones $x_1 \geq 3$ y $x_4 \geq 3$.

$\rightarrow X_1+X_2+X_3<16$

$\rightarrow X_1+X_2+X_3+X_4=15$

$X_4=15-(X_1+X_2+X_3)$

(a) $|\,|\,x\,|\,x\,|\,x\,|\,x\,|$

$x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=1$, $x_5=1$, $x_6=1$, $x_7=0$

Notación C^n_r

Reparto cuatro "x" entre los siete x_i: hay CR^7_4 formas

$(r=4 \quad n=7)$ $\qquad \binom{n+r-1}{r} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!}$

$x \quad x \quad x \,||\, x \,||||$

$x_1=3 \quad x_2=0 \quad x_3=1 \quad x_4=x_5=x_6=x_7=0.$

(b) $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 \leq 4.$

Separamos en casos:

- Caso 1: $x_1+x_2+\cdots+x_7=0$

  Hay una sol. ($x_i=0$ para todo i) $CR^7_0 = \binom{6}{0} = 1$

- Caso 2: $x_1+x_2+\cdots+x_7=1$

  Hay 7 sols. ($x_1=1$ o $x_2=1$ o ...) $CR^7_1 = \binom{7}{1} = 7$

- Caso 3: $x_1+x_2+\cdots+x_7=2$

  Hay CR^7_2 sols.

- Caso 4: $x_1+x_2+\cdots+x_7=3$

  Hay CR^7_3

Hay (Regla suma) $1+7+CR^7_2+CR^7_3$ sols.

(c) $x_1+x_2+x_3+x_4=15$ $\qquad$ (Fijo 3 "x" para x_1

$x_1 \geq 3 \qquad x_4 \geq 3$ $\qquad$ 3 "x" para x_4

Con el c.V. $x_1=\bar{x}_1+3$ $\qquad$ y reparto las restantes 9 "x")

$x_4=\bar{x}_4+3$

tenemos

$x_1+x_2+x_3+x_4=15 \iff \bar{x}_1+x_2+x_3+\bar{x}_4=9$

Hay CR^4_9 $(r=9 \quad n=4)$ $\qquad \binom{n+r-1}{r} = \binom{12}{9} = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\,9!}$

Ejercicio 4.

a. Hallar la cantidad de subconjuntos de un conjunto con n elementos razonando con la fórmula del binomio. $a=b=1$

b. Probar que: $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_j^n = 0.$ $a=-1$ $b=1$

c. (Ej. 4 del 1^er parcial del 2000) Hallar el valor de la siguiente suma: $\sum_{k=0}^{203} C_k^{203}(-4)^k$. $a=-4$ $b=1$

$$\boxed{\text{F. Binomio}: (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} C_j^n \, a^j b^{n-j}}$$

(a) Supongamos que tenemos un cjto de n elementos.

\# Subconjuntos de tamaño n: 1 (el cjto)

\# " " " 1: n

\# " " " 2: C_2^n

⋮

\# Subconjuntos de tamaño j: C_j^n

En total (Regla de la suma) hay $1+n+C_2^n+C_3^n+\dots = \sum_{j=0}^{n} C_j^n$

Si tomo $a=b=1$ en la F. Binomio tenemos $(1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} C_j^n \cdot \underbrace{1^j \cdot 1^{n-j}}_{1}$

$\Rightarrow$ hay 2^n subconjuntos.

(b) Tomamos $a=-1$ y $b=1$ en F. Binomio.

$$(-1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} C_j^n (-1)^j$$

$\Rightarrow$ la suma da 0, como queríamos probar.

(c) Tomamos $a=-4$ $b=1$ en F. Binomio.

$$(-4+1)^{203} = \sum_{j=0}^{203} C^n_j (-4)^j$$

La suma da $(-3)^{203}$.