Práctica 3: Combinatoria

Combinaciones con repetición: formas de elegir r elem, con repetición, de una colección de n elem: $\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$.

$$\binom{\overset{n+r-1}{n}}{\underset{r}{m}} = \binom{\overset{n+r-1}{n}}{n-m}$$

$$\underbrace{n+r-1-r}_{n-1}$$

**Ejercicio 7.** ¿De cuántas formas puede distribuir un maestro ~~8~~ 5 bizcochos de chocolate y ~~7~~ 4 de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

· Repartimos un bizcocho de cada tipo a cada alumno. Quedan 5 bizc. ch y 4 crema a repartir entre 3 est.

· Distinguimos entre bizcochos de chocolate y crema, repartimos

5 ch y 4 crema

comb. c/rep $r=5$ $n=3$ — Regla Producto — comb. c/rep

$$\rightsquigarrow \underbrace{\times\ \times\ \times}_{\text{bizc. est 1}} \mid \underbrace{\times\ \times}_{\text{bizc est 2}} \mid \underbrace{\quad}_{\text{bizc est. 3}}$$

$\times\times\times\times\times\mid\mid$ ⇝ Pal. ≠ con símb rep $\boxed{\frac{7!}{2!\,5!}}$

Por cada bizcocho elegimos o asignamos un alumno (con repetición) de un total de 3 alumnos.

Hay $\binom{5+3-1}{5} = \frac{7!}{5!\,2!}$ formas distribuir los de chocolate

Hay $\binom{4+3-1}{4} = \frac{6!}{4!\,2!}$ formas de distribuir los de crema

En total hay $\binom{7}{5}\cdot\binom{6}{4}$

$$\binom{7}{5}\cdot\binom{6}{4} = \binom{7}{2}\cdot\binom{6}{2}$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

¿De cuántas formas podemos distribuir ~~siete~~ 3 manzanas y seis naranjas entre cuatro niños, de modo que cada uno reciba al menos una manzana?

Al dar a cada niño una manzana, tenemos $C(4 + 3 - 1, 3) = 20$ formas de distribuir las otras tres manzanas y $C(4 + 6 - 1, 6) = 84$ formas de distribuir las seis naranjas. Así, por la regla del producto, hay $20 \times 84 = 1680$ formas de distribuir la fruta en las condiciones dadas.

$r = 3$
$n = 4$ $\Big]$ $\binom{3+4-1}{3} = \binom{6}{3}$

**Ejercicio 6.**

(a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 personas en 12 sillas puestas en línea?

(b) Ídem pero las personas no deben quedar sentadas en asientos contiguos.

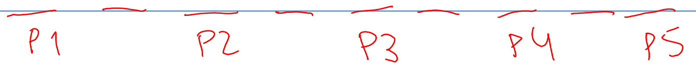
Supongamos que distinguimos personas.

$\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\, 3\, 2\, 1}{7!}$

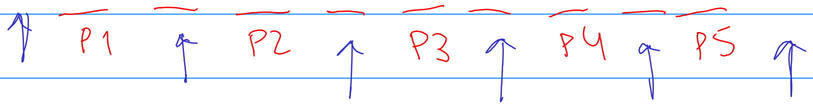
(a) $\frac{12}{P1}\cdot\frac{11}{P2}\cdot\frac{10}{P3}\;\frac{9}{P4}\;\frac{8}{P5}\cdot = P(12,5) = \frac{12!}{7!}$

(b) ① Sentamos a las 5 personas en 5 sillas: hay 5! formas

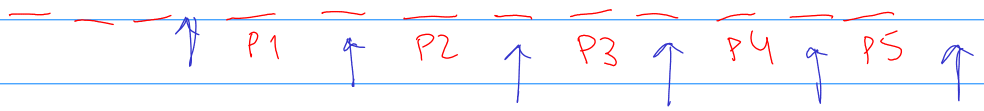
② Ponemos una silla entre dos personas consecutivas



③ Repartimos las 3 sillas restantes. en los espacios entre personas. Hay 6 posibles lugares.



Obs: las sillas pueden estar entre las mismas dos personas. Ejemplo:



Elegimos un lugar por cada silla, hay 6 posibles lugares, con repetición:

$r = 3$ $\quad n = 6$

Hay $\binom{6+3-1}{3} = \frac{8!}{5!3!}$ formas de repartir las tres sillas restantes

En total hay (Regla del producto) $\overset{①}{5!}\ \overset{③}{\frac{8!}{5!3!}} = \frac{8!}{3!}$ formas de sentarlos.

**Ejercicio 8.** Usando que $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, probar que:

$a_n x^n + \dots \qquad = b_n x^n + \dots$

$\Rightarrow a_n = b_n$

$$\sum_{i=0}^{i=n} (C_i^n)^2 = C_n^{2n}.$$

$$(1+x)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} x^i$$

$a=1 \quad b=x$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

$$\underset{a}{(1}+\underset{b}{x)}^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}$$

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$$

$||$

$$\underset{a}{(x}+\underset{b}{1)}^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^n$$

$(1+x)^{2n}$ y $(1+x)^n(1+x)^n$ son polinomios de grado $2n$, observemos que es el mismo polinomio. Ahora, el coef. de $x^n$ en $(1+x)^{2n}$ es $\binom{2n}{n}$. Entonces coef$(x^n)$ de $(1+x)^n(1+x)^n$ es $\binom{2n}{n}$ por una parte, y por otra parte podemos observar que es $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$:

$$(1+x)^n(1+x)^n = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}\right)$$

el coef. de $x^n$ es:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$$

$$\left(\binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \dots + \binom{n}{n}x^n\right)\left(\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n}x^0\right)$$

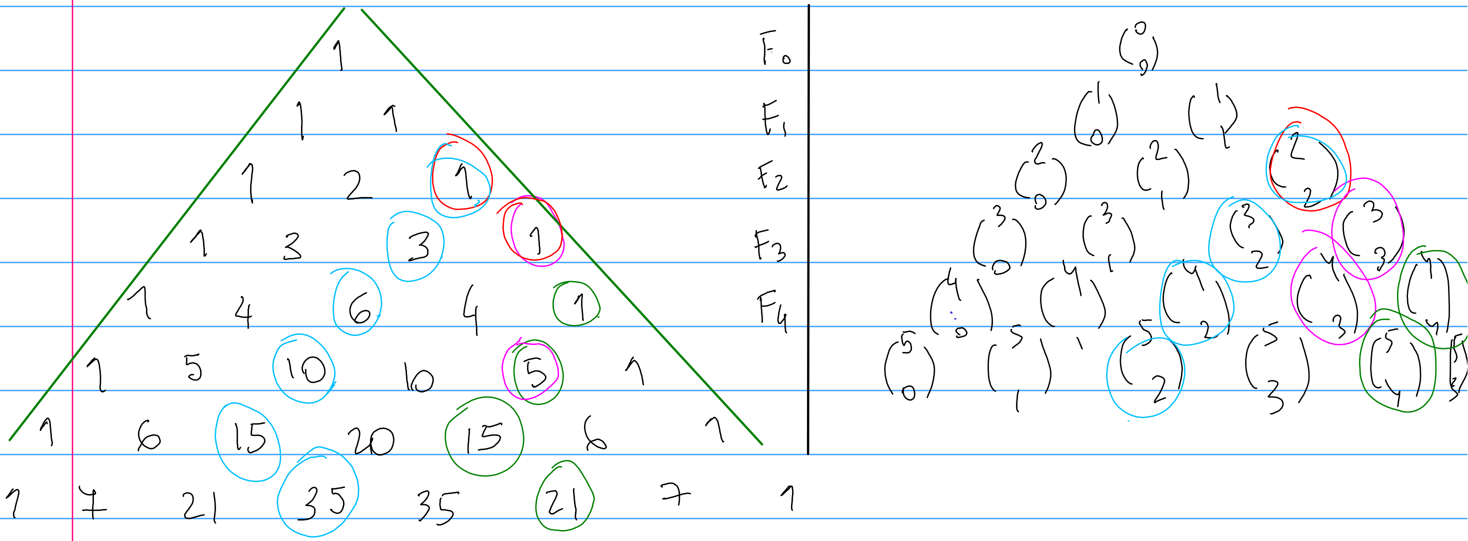
$$\underbrace{\binom{n}{0}x^0\binom{n}{0}x^n}_{gr(n)} + \underbrace{\binom{n}{0}x^0\binom{n}{1}x^{n-1}}_{gr(n-1)} + \dots + \underbrace{\binom{n}{0}x^0\binom{n}{n}x^0}_{+\dots gr0} + \underbrace{\binom{n}{1}x^1\binom{n}{1}x^n}_{gr(n+1)} + \underbrace{\binom{n}{1}x^1\binom{n}{1}x^{n-1}}_{gr\,n} + \dots$$

$$\binom{n}{0}\binom{n}{0}x^0x^n = 1 \cdot x^n$$

**Ejercicio 4.** Considerar la suma: $\sum_{i=0}^{i=n} C_m^i$.

**a.** Calcular la suma para algunos casos, usando el triángulo de Pascal. Aclaración: si $i < m$ asumimos $C_m^i = 0$.

**b.** Conjeture cuánto suma en general y demuéstrelo por Inducción Completa.



$n=2$
$m=2$
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{2} = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\binom{0}{2}} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\binom{1}{2}} + \binom{2}{2} = 1$$

$n=3$
$m=4$
$$\sum_{i=0}^{3} \binom{i}{4} = \binom{0}{4} + \binom{1}{4} + \binom{2}{4} + \binom{3}{4} = 0$$

$n=4$
$m=3$
$$\sum_{i=0}^{4} \binom{i}{3} = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\binom{0}{3}} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\binom{1}{3}} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\binom{2}{3}} + \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\binom{3}{3}} + \underset{\overset{\shortparallel}{4}}{\binom{4}{3}} = 5$$

$n=6$
$m=4$
$$\sum_{i=0}^{6} \binom{i}{4} = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\binom{0}{4}} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\binom{1}{4}} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\binom{2}{4}} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\binom{3}{4}} + \binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} = 21$$

$n=6$
$m=2$
$$\sum_{i=0}^{6} \binom{i}{2} = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\binom{0}{2}} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\binom{1}{2}} + \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\binom{2}{2}} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = 35$$

$\ldots$

Conjetura: $\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$

Vamos a probarlo por $IC_0$ en n: sea $m \in \mathbb{N}$

Paso base: $n=0$ queremos ver $\binom{0}{m} = \binom{1}{m+1}$ :

Si $m=0$ $\quad \binom{0}{1} = 1 \quad$ y $\quad \binom{1}{1} = 1$ ✓

Si $m>0$ $\quad \binom{0}{m} = 0 \quad$ y $\quad \binom{1}{m+1} = 0$ pq $1 < m+1$ ✓

H.I. : $\sum_{i=0}^{k} \binom{i}{m} = \binom{k+1}{m+1}$

T.I. : $\sum_{i=0}^{k+1} \binom{i}{m} = \binom{k+2}{m+1}$

Dem. de la T.I. a partir de la H.I.

$$\sum_{i=0}^{k+1} \binom{i}{m} = \sum_{i=0}^{k} \binom{i}{m} + \binom{k+1}{m}$$

En gral: $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$

$$\overset{H.I.}{=} \binom{k+1}{m+1} + \binom{k+1}{m}$$

△ Pascal $= \binom{k+2}{m+1}$