

Práctica 3: Combinatoria

Combinaciones con repetición: formas de elegir elem, con repetición, de una colección de n elem:

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

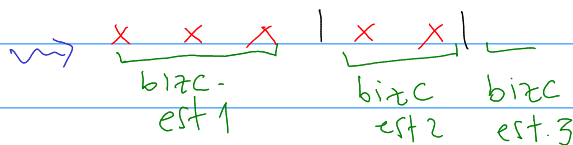
$\frac{n+r-1-r}{n-1}$

Ejercicio 7. ¿De cuántas formas puede distribuir un maestro ⁵ bizcochos de chocolate y ⁴ de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

Repartimos un bizcocho de cada tipo a cada alumno. Quedan 5 bizc. ch y 4 crema a repartir entre 3 est.

Distinguimos entre bizcochos de chocolate y crema, repartimos

5 ch y 4 crema
 comb. c/rep Regla del producto comb. c/rep
 $r=5$ $r=4$
 $n=3$



x x x x x ||

Pal. ≠ con simb rep

$$\frac{7!}{2!5!}$$

Por cada bizcacha elegimos o así nomos un alumno (con repetición) de un total de 3 alumnos.

Hay $\binom{5+3-1}{5} = \frac{7!}{5!2!}$ formas distribuir los de chocolate

Hay $\binom{4+3-1}{4} = \frac{6!}{4!2!}$ formas de distribuir los de crema

En total hay $\binom{7}{5} \cdot \binom{6}{4}$
 $\binom{7}{2} \cdot \binom{6}{2}$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

¿De cuántas formas podemos distribuir ^{3,} siete manzanas y seis naranjas entre cuatro niños, de modo que cada uno reciba al menos una manzana?

Al dar a cada niño una manzana, tenemos $C(4 + 3 - 1, 3) = 20$ formas de distribuir las otras tres manzanas y $C(4 + 6 - 1, 6) = 84$ formas de distribuir las seis naranjas. Así, por la regla del producto, hay $20 \times 84 = 1680$ formas de distribuir la fruta en las condiciones dadas.

$$\left. \begin{array}{l} r=3 \\ n=4 \end{array} \right\} \binom{3+4-1}{3} = \binom{6}{3}$$

Ejercicio 6.

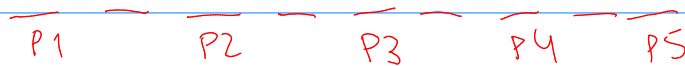
- (a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 personas en 12 sillas puestas en línea?
 (b) Ídem pero las personas no deben quedar sentadas en asientos contiguos.

Supongamos que distinguimos personas.

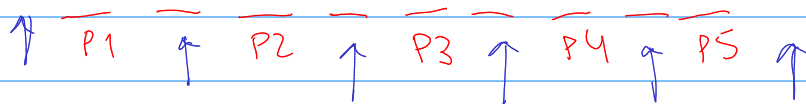
$$(a) \frac{12}{P_1} \cdot \frac{11}{P_2} \cdot \frac{10}{P_3} \cdot \frac{9}{P_4} \cdot \frac{8}{P_5} = P(12,5) = \frac{12!}{7!}$$

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{7!}$$

- (b) ① Sentamos a las 5 personas en 5 sillas: hay $5!$ formas
 ② Ponemos una silla entre dos personas consecutivas



- ③ Repartimos las 3 sillas restantes en los espacios entre personas. Hay 6 posibles lugares.



Obs: las sillas pueden estar entre las mismas dos personas. Ejemplo:



Elegimos un lugar por cada silla, hay 6 posibles lugares, con repetición:

$$r=3 \quad h=6$$

Hay $\binom{6+3-1}{3} = \frac{8!}{5!3!}$ formas de repartir las tres sillas restantes

En total hay (Regla del producto) $\binom{1}{5!} \binom{3}{\frac{8!}{5!3!}} = \frac{8!}{3!}$ formas de sentarlos.

Ejercicio 8. Usando que $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, probar que:

$$\sum_{i=0}^{2n} (C_i^n)^2 = C_{2n}^{2n}.$$

$$(1+x)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} x^i$$

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i}$$

$(1+x)^{2n} \supset \underbrace{(1+x)^n (1+x)^n}$ son polinomios de grado $2n$.

El coef. de x^n en el polinomio $(1+x)^{2n}$ es $\binom{2n}{n}$
 $i=n$

¿Cuál es el coef. de x^n en $(1+x)^n(1+x)^n$?