Práctica 3: Combinatoria

Combinaciones con repetición: formas de elegir r elem, con repetición, de una colección de n elem: $\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$ con $n \to n+r-1$, $m \to r$, $\underbrace{n+r-1-r}_{n-1}$

Ejercicio 7. ¿De cuántas formas puede distribuir un maestro ~~8~~ 5 bizcochos de chocolate y ~~7~~ 4 de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

· Repartimos un bizcocho de cada tipo a cada alumno. Quedan 5 bizc. ch y 4 crema a repartir entre 3 est.

· Distinguimos entre bizcochos de chocolate y crema, repartimos

5 ch y 4 crema

comb. c/rep Regla Producto comb. c/rep

r = 5
n = 3

$\rightsquigarrow \underbrace{\times\ \times\ \times}_{\text{bizc. est 1}} \mid \underbrace{\times\ \times}_{\text{bizc est 2}} \mid \underbrace{}_{\text{bizc est. 3}}$

$\times\times\times\times\times\mid\mid \rightsquigarrow$ Pal. ≠ con símb rep

$\frac{7!}{2!\,5!}$

Por cada bizcocho elegimos o asignamos un alumno (con repetición) de un total de 3 alumnos.

Hay $\binom{5+3-1}{5} = \frac{7!}{5!\,2!}$ formas distribuir los de chocolate

Hay $\binom{4+3-1}{4} = \frac{6!}{4!\,2!}$ formas de distribuir los de crema

En total hay $\binom{7}{5} \cdot \binom{6}{4}$
$\qquad\qquad\quad \| \qquad\quad \|$
$\qquad\qquad \binom{7}{2} \cdot \binom{6}{2}$

$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$

¿De cuántas formas podemos distribuir siete manzanas y seis naranjas entre cuatro niños, de modo que cada uno reciba al menos una manzana?

Al dar a cada niño una manzana, tenemos $C(4+3-1, 3) = 20$ formas de distribuir las otras tres manzanas y $C(4+6-1, 6) = 84$ formas de distribuir las seis naranjas. Así, por la regla del producto, hay $20 \times 84 = 1680$ formas de distribuir la fruta en las condiciones dadas.

$r = 3$, $n = 4$: $\binom{3+4-1}{3} = \binom{6}{3}$

Ejercicio 6.

(a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 personas en 12 sillas puestas en línea?

(b) Ídem pero las personas no deben quedar sentadas en asientos contiguos.

Supongamos que distinguimos personas.

(a) $\underset{P1}{12} \cdot \underset{P2}{11} \cdot \underset{P3}{10} \cdot \underset{P4}{9} \cdot \underset{P5}{8} \cdot \cancel{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7!}} = P(12,5) = \frac{12!}{7!}$

(b) 1) Sentamos a las 5 personas en 5 sillas: hay $5!$ formas

2) Ponemos una silla entre dos personas consecutivas

$\underline{P1}\ \_\ \underline{P2}\ \_\ \underline{P3}\ \_\ \underline{P4}\ \_\ \underline{P5}$

3) Repartimos las 3 sillas restantes. en los espacios entre personas. Hay 6 posibles lugares.

$\uparrow\ \underline{P1}\ \_\ \uparrow\ \underline{P2}\ \_\ \uparrow\ \underline{P3}\ \_\ \uparrow\ \underline{P4}\ \_\ \uparrow\ \underline{P5}\ \uparrow$

Obs: las sillas pueden estar entre las mismas dos personas. Ejemplo:

$\_\ \_\ \_\ \uparrow\ \underline{P1}\ \_\ \uparrow\ \underline{P2}\ \_\ \uparrow\ \underline{P3}\ \_\ \uparrow\ \underline{P4}\ \_\ \uparrow\ \underline{P5}\ \uparrow$

Elegimos un lugar por cada silla, hay 6 posibles lugares, con repetición:

$r = 3 \qquad n = 6$

Hay $\binom{6+3-1}{3} = \frac{8!}{5!3!}$ formas de repartir las tres sillas restantes

En total hay (Regla del producto) $\overset{①}{5!}\ \overset{③}{\frac{8!}{5!3!}} = \frac{8!}{3!}$ formas de sentarlos.

Ejercicio 8. Usando que $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, probar que:

$$\sum_{i=0}^{i=n}(C_i^n)^2 = C_n^{2n}.$$

$$(1+x)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}x^i$$

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}$$

$(1+x)^{2n}$ y $(1+x)^n(1+x)^n$ son polinomios de grado $2n$.

El coef. de x^n en el polinomio $(1+x)^{2n}$ es $\binom{2n}{n}$

$i=n$

¿Cuál es el coef. de x^n en $(1+x)^n(1+x)^n$?