Práctico 2 - Clase 2.

Ejercicio 6. ¿Cuántos números naturales pares de tres dígitos distintos (en base diez), existen?

Queremos contar los números abc tales que:
- a, b y c son distintos
- c es par
- $a \neq 0$.

$$\underset{\substack{9 \text{ opc.} \\ \text{para } a \\ \{1,\dots,9\}}}{a}\ \underset{\substack{9 \text{ opc} \\ \text{para } b}}{b}\ \underset{\substack{\text{si } a \text{ y } b \text{ impar: } 5 \text{ opc} \\ \text{si no hay menos.}}}{c}$$

Separemos en casos, según la paridad de a y b.

Opción 1: a par y b par

$$\underset{\substack{4 \text{ opc} \\ (a\neq 0)}}{a}\quad \underset{\substack{4 \text{ opc} \\ (b\neq a)}}{b}\quad \underset{\substack{3 \text{ opc} \\ (a\neq b,\ a\neq c)}}{c}$$

Hay $4^2 \cdot 3$ números con esta condición.

Opción 2: a impar y b par

$$\underset{5}{a}\quad \underset{5}{b}\quad \underset{4}{c}$$

Hay $5^2 \cdot 4$ números con esta condición.

Opción 3: a par y b impar

$$\underset{4 \text{ opc}}{a}\quad \underset{5 \text{ opc}}{b}\quad \underset{4 \text{ opc}}{c}$$

Hay $4^2 \cdot 5$ números con esta condición.

Opción 4: a impar y b impar

a b c

5 opc 4 opc 5 opc

Hay $5^2 \cdot 4$ números con esta condición.

En total, por la regla de la suma hay:

$$4^2 \cdot 3 + 5^2 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2 + 5^2 \cdot 4$$

números pares de tres dígitos distintos (no comienzan con 0).

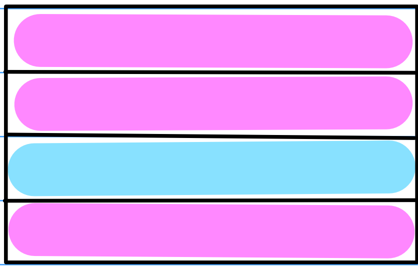
Ejercicio 5.

a. ¿De cuántas formas se puede colorear una bandera de cuatro franjas horizontales con cinco colores?

b. Idem a la parte **a.** con la restricción de que el color de la primer y última franja sean distintos.

Supongamos que podemos colorear franjas adyacentes del mismo color.

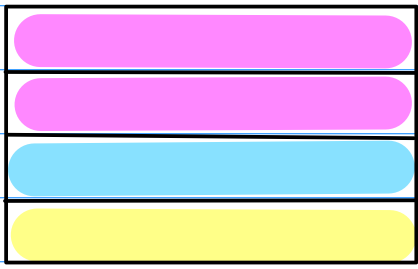
(a)



→ 5 posibles colores
→ 5 " "
→ 5 " "
→ 5 " "

En total hay 5^4 formas de colorearla

(b)

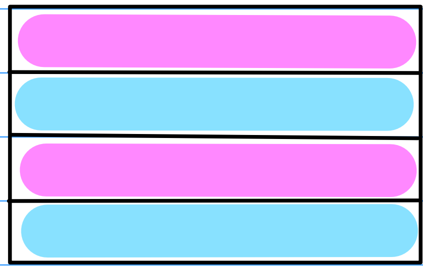


→ 5 posibles colores
→ 5 " "
→ 5 " "
→ 4 posibles colores.

En total hay $5^3 \cdot 4$ formas de colorearlo.

Hagamos el mismo ejercicio pero ahora suponiendo que las franjas ady. no se pueden colorear igual.

(a)



→ 5 posibles colores

→ 4

→ 4 (no celeste, sí rosa ...)

→ 4

En total hay $5^2 \cdot 4^2$ formas de colorearla.

(b) Distinguimos dos casos.

Primer caso: el color de la franja 1 y el de la franja 3 coincide.

1
2
3
4

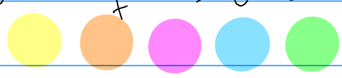
→ 5 opc

→ 4 opc

→ 1 opc $f1 = f3$

→ 4 opc

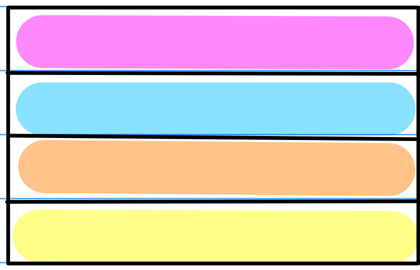
Supongamos que los cinco colores son



Como $f1 = f3$, $f4$ puede ser

Segundo caso: el color de la franja 1 y el de la franja 3 no coincide.

1
2
3
4



→ 5 opc

→ 4 opc

→ 3 opc

→ 3 opc.

Con los mismos colores:

$f3$ puede ser

pues por def $f1 \neq f3$ y $f2 \neq f3$ por ser ady.

En total hay $5 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 \cdot 3^2$ formas de colorearla.

Ejercicio 9. (Ej. 1 del examen de diciembre de 2016)

a. ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de SKYWALKER que empiecen en vocal y no contengan la secuencia RL?

b. ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de SKYWALKER que empiecen en vocal y no contengan la secuencia RK?

(a) Observemos que:

\# palabras con todas las letras de SKYWALKER que empiezan en vocal sin RL

=

\# pal. que empiezan en vocal ... − # pal. que empiezan en vocal y tienen RL.

A ... B

A) $\underline{2}\,\underline{8}\,\underline{7}\,\underline{6}\,\underline{5}\,\underline{4}\,\underline{3}\,\underline{2}\,\underline{1}$ pero recordemos que permutar las dos letras K no nos cambia la palabra

$\Rightarrow$ hay $8!$ palabras distintas que empiezan con vocal y tienen todas las letras de SKYWALKER.

B) $\boxed{\text{Forma 1}}$ Permutamos todas las letras de SKYWALKER excepto R,L.

Luego hay 7 lugares donde colocar RL.

$\underline{2}\ \underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}$

Permutar K cambia la palabra $\Rightarrow$ hay

$$\frac{2\cdot 6!}{2} = 6!$$

palabras que empiezan en vocal y tienen las letras SKYWAKE

RL no puede estar aquí pq empieza en vocal

$\underline{A}\ \underline{S}\ \underline{K}\ \underline{Y}\ \underline{W}\ \underline{E}\ \underline{K}$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

Posibles posiciones para RL

Ahora hay 7 opciones para RL $\Rightarrow$ hay $7\cdot 6! = 7!$ pal. que si tienen RL.

$\boxed{\text{Forma 2}}$ Consideramos RL como una única letra, queremos contar las palabras que empiezan en vocal y tienen las letras

S K Y W A RL E K

Como en A): permutar las letras K no cambia la palabra entonces hay

$$2 \cdot \frac{7!}{2} = 7!$$

palabras distintas que si tienen RL

En total hay $8! - 7! = 7!(8-1) = 7 \cdot 7!$ palabras que NO tienen RL.

(b) Hagamos el mismo cálculo pero con la secuencia RK.

La cantidad de palabras con vocal al ppio. es $8!$, restemos la cant. de palabras con RK.

Adaptemos las dos formas anteriores de calcularlo.

$\boxed{\text{Forma 1}}$ Permutamos todas las letras de SKYWALKER excepto R, K

Luego hay 7 lugares donde colocar RK.

Hay $\underline{2} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 2 \cdot 6!$

palabras que empiezan en vocal y tienen las letras SKYWAKE

(observemos que hay una sola K)

RK no puede estar aquí pq empieza en vocal A S K Y W E K

posibles posiciones para RK

Ahora hay 7 opciones para RK $\Rightarrow$ hay $2 \cdot 7!$ pal. que si tienen RK

Forma 2 Consideramos RK como una única letra, queremos contar las palabras que empiezan en vocal y tienen las letras

S K Y W A RK E L

No hay dos letras iguales → hay $2 \cdot 7!$ palabras distintas.
(observar que permutar K con RK sí cambia la palabra)

En total hay $8! - 2 \cdot 7! = 7!(8-2) = 6 \cdot 7!$ palabras que NO tienen RK.