Práctico 2: Combinatoria 14/3/24.

Repaso Teórico: 1.1 a 1.4 Grimaldi.

Regla de la suma: Si una primera tarea puede realizarse de *m* formas, mientras que una segunda tarea puede realizarse de *n* formas, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultánea, entonces, para llevar a cabo cualquiera de ellas pueden utilizarse cualquiera de $m + n$ formas.

T_1 o T_2 ⇒ en total hay $m+n$ formas

↳ m formas ↳ n formas

Regla del producto: Si un procedimiento se puede descomponer en las etapas primera y segunda, y si existen *m* resultados posibles de la primera etapa y si, para cada uno de estos resultados, existen *n* resultados posibles para la segunda etapa, entonces el procedimiento total se puede realizar, en el orden dado, de *mn* formas.

P_1 y P_2 ⇒ en total hay $m \cdot n$ formas.

↳ m pos ↳ n pos

Permutación de tamaño r en n objetos $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Con símbolos repetidos:

En general, si existen n objetos con n_1 de un primer tipo, n_2 de un segundo tipo, . . . , y n_r de un r-ésimo tipo, donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, entonces existen $\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$ disposiciones (lineales) de los n objetos dados. (Los objetos del mismo tipo son indistinguibles.)

2 M 3 A 2 T 1 E 1 I 1 C

$n = 10$

$\frac{10!}{2!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!}$

Combinación de tamaño r en n objetos $C\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ (no importa el orden)

Con símbolos repetidos: $\binom{n+r-1}{r}$

$$\begin{aligned} a &\leq b \\ &= c \\ &= d \\ &\leq e \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2 &\leq 3 \\ &= 2+1 \\ &= 1+1+1 \\ &\leq 4 \end{aligned}$$

$a \leq b = c = d \leq e$

$a \leq b \quad b = c \quad c = d \quad d \leq e$

en particular $a \leq e$

Ejercicio 1. Un alfabeto consta de 5 vocales y 22 consonantes. ¿Cuántas palabras de longitud 6 se pueden formar con tal alfabeto que no tengan ni dos consonantes ni dos vocales juntas?

La palabra: - empieza con vocal

→ 5 opc, → 22 opc, → 5 opc, 22 opc, 5 opc, 22 opc

$\underline{\quad}$ V, $\underline{\quad}$ C, $\underline{\quad}$ V, $\underline{\quad}$ C, $\underline{\quad}$ V, $\underline{\quad}$ C

$5 \cdot 22 \cdot 5 \cdot 22 \cdot 5 \cdot 22$

ó

hay $22^3 \cdot 5^3$ palabras de long 6 que empiezan en vocal y no tienen 2 voc. ni 2 consonantes consecutivas

- empieza con consonante

$\underline{\quad}$ C, $\underline{\quad}$ V, $\underline{\quad}$ C, $\underline{\quad}$ V, $\underline{\quad}$ C, $\underline{\quad}$ V

hay $22^3 \cdot 5^3$ palabras de longitud 6 que empiezan en consonante y no tienen 2 vocales ni 2 cons. consecutivas.

En total tenemos $2 \cdot 22^3 \cdot 5^3$ palabras de este tipo.

Ejercicio 2. La final de un campeonato de fútbol ha terminado en empate y debe definirse por penales. Para patearlos, la directora técnica debe elegir en orden 5 jugadoras diferentes de un total de 11. ¿De cuántas formas puede hacerlo? Responder la misma pregunta si la capitana del equipo siempre patea el quinto penal.

¿si no importa orden?
$C(11,5)$
Ahora importa orden
$C(11,5) \cdot 5! = P(11,5)$

$\underline{\quad}$ J1 → 11 opc, $\underline{\quad}$ J2 → 10 opc, $\underline{\quad}$ J3 → 9 opc, $\underline{\quad}$ J4 → 8 opc, $\underline{\quad}$ J5 → 7 opc

(no se puede repetir)

En total hay $\underline{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}$ formas de hacerlo.

$$P(\underset{n}{11},\underset{r}{5}) = \frac{11!}{\underset{n-r}{6!}} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \underbrace{\left(\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}\right)}_{1}$$

$\underline{\quad}$ J1 → 10 opc, $\underline{\quad}$ J2 → 9, $\underline{\quad}$ J3 → 8, $\underline{\quad}$ J4 → 7, $\underline{\quad}$ J5 → 1 (Capitana)

En total hay $\underline{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = P(10,4) = \frac{10!}{6!}$ formas, si la 5ª es la cap.

Ejercicio 3.

(a) ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar usando todas las letras de la palabra *ÁRBOL*? 5 ops 4 3 2 1

(b) ¿ Cuántas palabras de largo 3 se pueden formar usando letras distintas de la palabra *ÁRBOL* ? 5 4 3

(c) ¿ Cuántas palabras distintas pueden obtenerse permuntando las letras de la palabra *ALGORITMO*?

(a) Tenemos $5!$ palabras distintas. $P(5,5)$

(b) Tenemos $5 \cdot 4 \cdot 3 = P(5,3)$

(c) ALGORITMO

ALGORITMO

Tenemos $\frac{9!}{2!}$ palabras distintas.

$$\frac{\frac{\left(\frac{10!}{2}\right)}{2}}{3!}$$

→ conté cada pal 2 veces (hay 2 M)

→ Conté 2 veces cada pal (hay 2 T)

↳ si permuto las A ~~tengo la~~ misma palabra.

MATEMATICA MATEMATICA

Tenemos $\frac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}$ permutaciones

Permutaciones o disposiciones con simbolos repetidos.

(si permuto letras iguales me queda la misma palabra ⇒ cada palabra la conte varias veces)

$(2! \cdot 3! \dots)$

Ejercicio 4. En una prueba que consta de 10 preguntas un estudiante decide responder sólo 6, y quiere que al menos 3 de ellas estén entre las 5 primeras. ¿De cuántas formas distintas podría hacerlo?

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

AL MENOS 3

Formas de Hacerlo:

- 3 de las primeras 5 y 3 de las últimas 5
  - $C\binom{5}{3} = \binom{5}{3}$ $\frac{5!}{3!\,2!}$ $\binom{5}{3}$
  - Hay $C(5,3) \cdot C(5,3)$ formas de elegir 3 y 3
- 4 de las primeras 5 y 2 de las últimas 5
  - $\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\,1!}$ $\binom{5}{2}$
  - Hay formas
- 5 de las primeras 5 y 1 de las últimas 5
  - $\binom{5}{5}$ $\binom{5}{1}$
  - Hay 5 opciones.

En total hay: $\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{3} + \binom{5}{4}\binom{5}{2} + 5$ formas de elegir.

Hay 6 formas de permutar las letras A, B, C

A	B	C
A	C	B
B	C	A
B	A	C
C	A	B
C	B	A