Práctico 13: Grafos II.

Árboles

Recordamos que un árbol es un grafo conexo sin ciclos. Para árboles vale la fórmula $|V|=|E|+1$.

Para cualquier grafo no dirigido vale la fórmula
$$2\cdot|E|=\sum_{v\in V} gr(v).$$

Ejercicio 1. Sean $T_1=(V_1,E_1)$ y $T_2=(V_2,E_2)$ dos árboles. Determine $|V_1|, |V_2|$ y $|E_2|$ si se sabe que $|E_1|=17$ y $|V_2|=2|V_1|$. .

$|V_1|=|E_1|+1=17+1=18$

$|V_2|=2\,|V_1|=36$

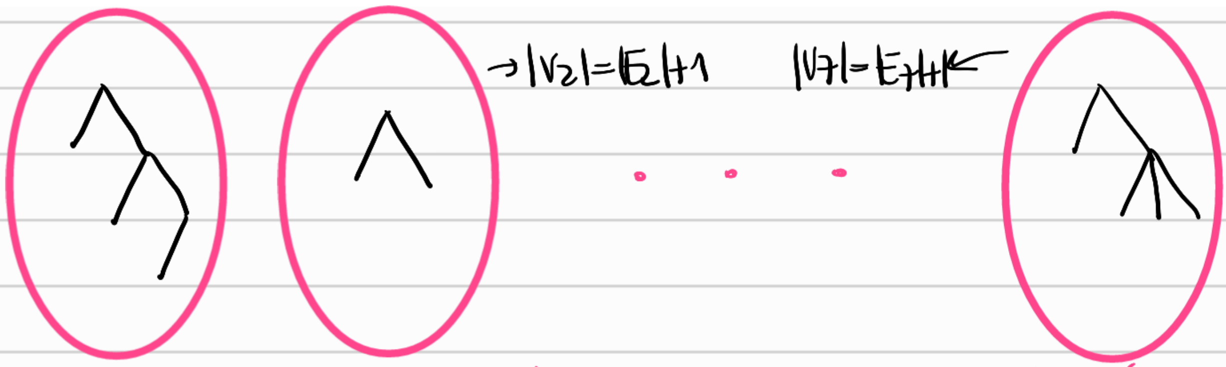
$|E_2|=|V_2|-1=35.$

Ejercicio 2. unión disjunta de árboles / grafo sin ciclos.

a. Sea $F_1=(V, E)$ un bosque de siete árboles con $|E|=40$. ¿Cuánto vale $|V|$?

b. Si $F_2=(V', E')$ es un bosque con $|V'|=62$ y $|E'|=51$, ¿cuántos árboles determina F_2?

(a)



$A_1=(V_1,E_1)$ $A_2=(V_2,E_2)$ $A_7=(V_7,E_7)$

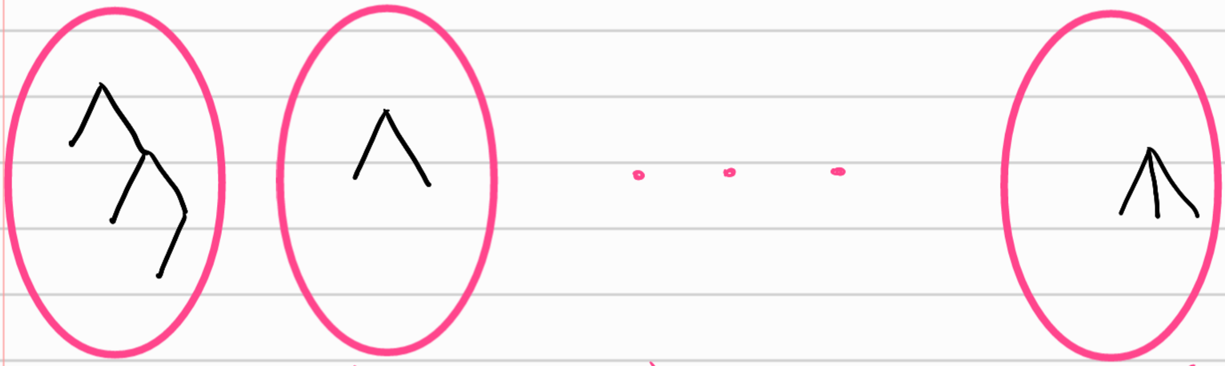
F_1 es unión disjunta de $A_1,\dots,A_7$ entonces
$|V|=|V_1|+|V_2|+\dots+|V_7|$ y $|E|=|E_1|+|E_2|+\dots+|E_7|$

Los A_i son árboles entonces $|V_i|=|E_i|+1$, luego

$$|V|=\sum_{i=1}^{7}|V_i|=\sum_{i=1}^{7}(|E_i|+1)=\sum_{i=1}^{7}|E_i|+7=|E|+7=\underline{\underline{47}}.$$

Otra forma: Podemos conectar el grafo agregando 6 aristas que unen: A_1 y A_2, A_2 y A_3... A_6 y A_7. Queda un árbol con 46 aristas y 47 vert.

(b)



$A_1=(V_1,E_1)$ $A_2=(V_2,E_2)$ ... $A_m=(V_m,E_m)$

Queremos hallar m.

$$62=|V|=\sum_{i=1}^{m}|V_i| = \sum_{i=1}^{m}(|E_i|+1) = \sum_{i=1}^{m}|E_i|+m = 51+m$$

Entonces $\underline{\underline{m=11}}$

Ejercicio 24. (Examen febrero 2009) ¿Cuántos vértices tiene un árbol con 16 vértices de grado 1, 20 vértices de grado 2 y el $\underbrace{\text{resto}}_{|V|-36}$ de grado 4?

Por ser árbol $|V|=|E|+1$, donde sabemos que $2|E|=\sum_{v\in V} gr(v)$.

Entonces:

$$|E|=\frac{16\cdot 1+20\cdot 2+\overbrace{(|V|-36)}^{\text{el resto de los vértices}}\cdot 4}{2}$$

$$= 28-72+2|V|$$

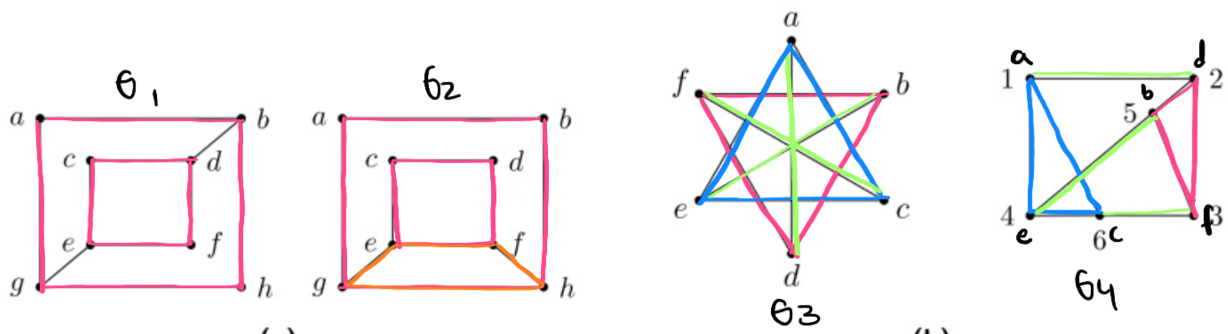
$$=-44+2(|E|+1)$$

$$=-42+2|E|$$

$\Rightarrow |E|=42 \Rightarrow |V|=43.$

Isomorfismos

Ejercicio 9. Para cada par de grafos de la Figura 2 determine si los grafos son o no isomorfos.



(a) (b)

Recordemos que dos grafos $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ son isomorfos si existe $\phi: V \to V'$ biyectiva que cumple que $\{v,w\} \in E$ si y sólo si $\{\phi(v),\phi(w)\} \in E'$.

Si queremos probar que dos grafos son isomorfos: damos el isomorfismo ϕ.

Si queremos probar que dos grafos no son isomorfos podemos usar argumentos del siguiente tipo.

- G tiene un vértice de grado K y G' no.
- La cantidad de K-ciclos de G y G' es distinta.
- La cantidad de componentes conexas de G y G' es distinta
- G tiene un ciclo euleriano y G' no.

(a) No son isomorfos.

- G_2 tiene más 4-ciclos que G_1
- G_2 tiene un 8-ciclo y G_1 no
- G_2 tiene dos vértices de orden 3 adyacentes y G_1 no.

(b) Son isomorfos.

$\phi(a) = 1$ $\qquad$ $\phi(d) = 2$

$\phi(b) = 5$ $\qquad$ $\phi(e) = 4$

$\phi(c) = 6$ $\qquad$ $\phi(f) = 3$.

Cnos. Eulerianos y Hamiltonianos

Un recorrido Euleriano es un camino abierto que pasa exactamente una vez por cada arista del grafo.

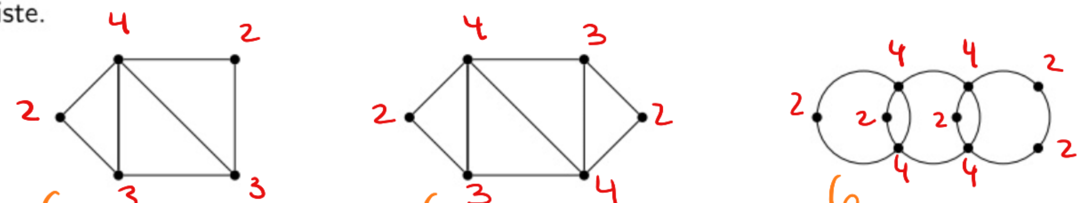
Un circuito Euleriano es un camino cerrado que pasa exactamente una vez por cada arista del grafo.

Teorema: G conexo.

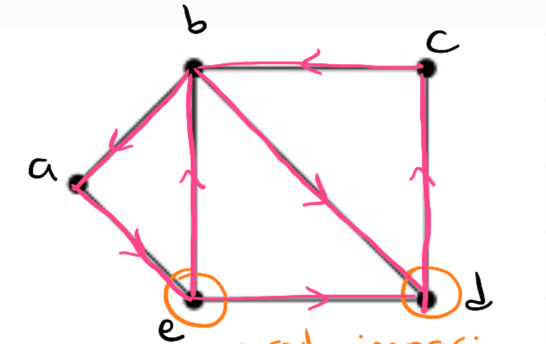
- G posee un circuito Euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.
- G posee un recorrido Euleriano si y sólo si hay exactamente dos vértices de grado impar (el resto son de grado par).

Ejercicio 18. Halle un recorrido o un circuito euleriano para cada grafo de la Figura 3 o demuestre que no existe.

En este color los grados.

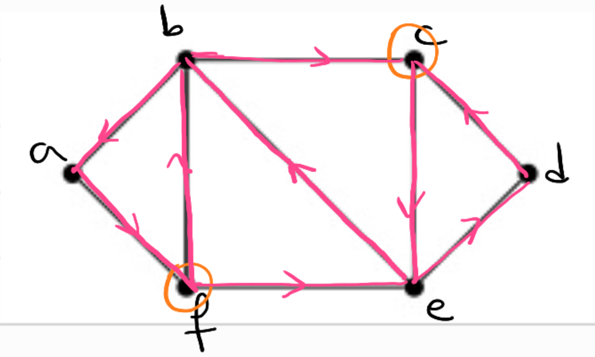


↳ tiene recorrido ↳ tiene recorrido ↳ tiene circuito.

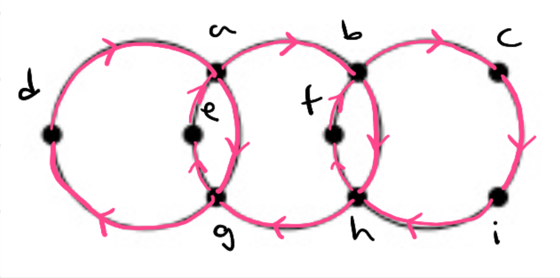


grado impar: inicio y final del recorrido.

Recorrido:
(e, b, a, e, d, c, b, d)

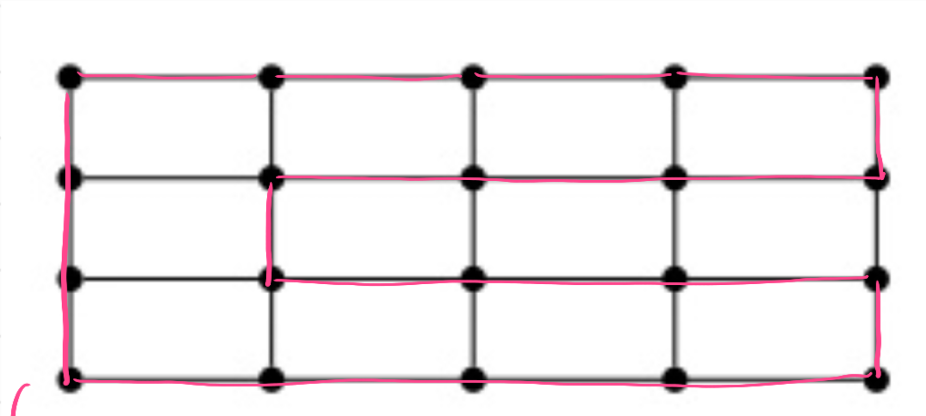


Recorrido:
(f, b, a, f, e, d, c, e, b, c)



Circuito:
(a, g, e, a, b, h, f, b, c, i, h, g, d, a)

Un ciclo Hamiltoniano es un camino que pasa exactamente una vez por todos los vértices del grafo.



ejemplo de ciclo Hamiltoniano.