Resumen: Grafos

Tipos de caminos:

Vértice(s) repetido(s)	Arista(s) repetida(s)	Abierto	Cerrado	Nombre
Sí	Sí	Sí		Camino (abierto)
Sí	Sí		Sí	Camino (cerrado)
Sí	No	Sí		Recorrido
Sí	No		Sí	Circuito
No	No	Sí		Camino simple ab
No	No		Sí	Ciclo / cno. simple cerrado si long ≥3

(Multigrafos: si hay 2 o más aristas con los mismos extremos.)

Teorema: Si existe un recorrido de a a b entonces existe un camino simple de a a b.

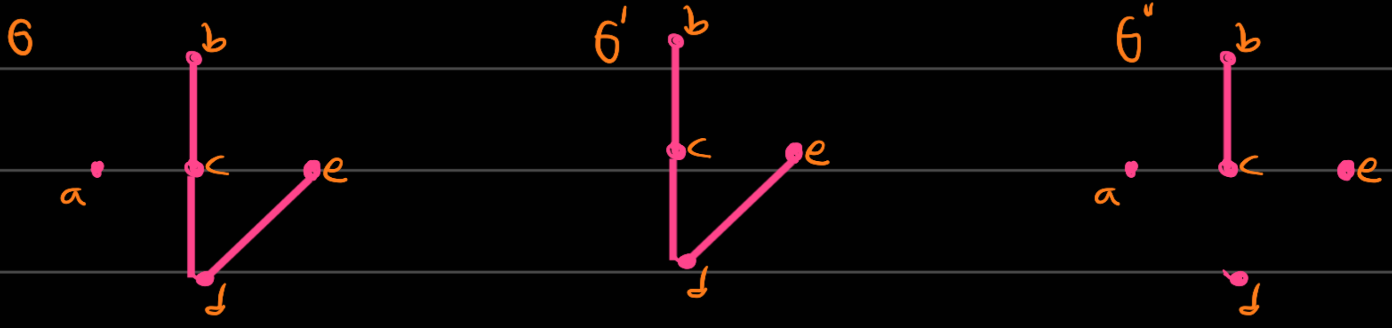
Definición (grafo conexo): grafo donde existe un cno. simple entre cualesquiera dos vértices.

Definición (subgrafo): $G=(V,E)$ un grafo
$G'=(V',E')$ un grafo tal que:

$V' \subseteq V$, $V' \neq \phi$, $E' \subseteq E$ y cada arista de E' tiene extremos en V'.

Definición (grafo recubridor): $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ un subgrafo de G, decimos que G' es recubridor si $V'=V$.

Ejemplo:

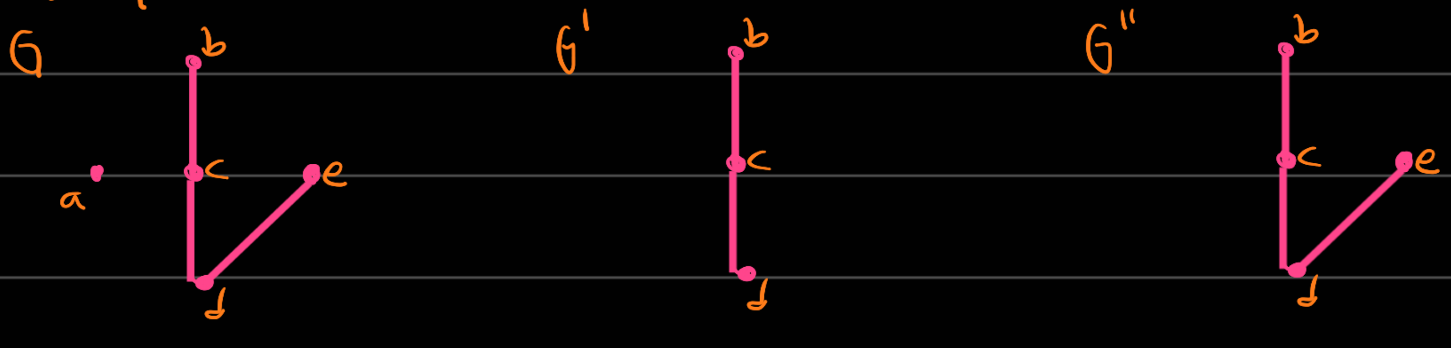


G'' es un grafo recubridor de G pero G' no.

Definición (subgrafo inducido): $G=(V,E)$ y U un subconjunto no vacío de vértices, el subgrafo inducido por U es $G'=(V',E')$ donde $V'=U$ y E' consiste en las aristas $\{x,y\}$ (grafo no dirigido) con $x,y \in U$.

Sea $v \in V$, llamamos $G-v$ al subgrafo inducido por $U=V-\{v\}$.

Ejemplo:



G' es el grafo inducido por $U'=\{b,c,d\}$ y G'' por $U''=\{b,c,d,e\}$

Definición (Grafo Complementario): $G=(V,E)$ un grafo con n vértices $\Rightarrow$ $\bar{G}$ es el subgrafo de K_n que consiste en los n vértices y todas las aristas que no están en G.

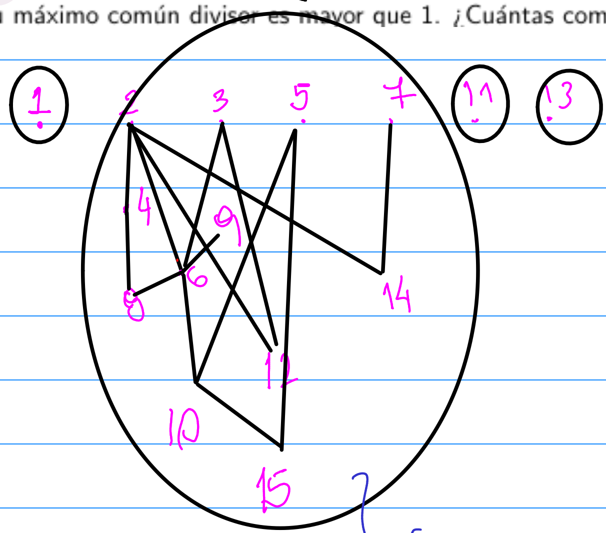
Definición (Isomorfismo de grafos): $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ son isomorfos si existe $\phi: V \to V'$ biyectiva tal que $\{v_1, v_2\} \in E \Rightarrow \{\phi(v_1), \phi(v_2)\} \in E'$.

Definición (grado de un vértice): $G=(V,E)$ y $v \in V$. El grado de v es $gr(v) := \#\{u : \{u,v\} \in E\}$.

Aristas que inciden en v.

Teorema: $G=(V,E)$ grafo (no dirigido) $\Rightarrow \sum_{v \in V} gr(v) = 2|E|$.

Ejercicio 7. Sea G el grafo con conjunto de vértices $\{1, 2, \ldots, 15\}$ donde el vértice i es adyacente al j si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. ¿Cuántas componentes conexas tiene G?



faltan aristas

$\mathrm{mcd}(4,6) = \max\{d : d \mid 4 \text{ y } d \mid 6\}$
$= \max\{1, 2\}$
$= 2$

$\mathrm{mcd}(6,10) = \max\{d : d \mid 6 \text{ y } d \mid 10\}$
$= \max\{1, 2\}$
$= 2$

Componente conexa del 1: $C_1 = \{1\}$
Componente conexa del 2: $C_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 3, 5, 7, 9, 15\}$
Componente conexa del 11: $C_{11} = \{11\}$
Componente conexa del 13 $C_{13} = \{13\}$

hay camino del 2 al 6 y del 6 al 3

Hay 4 componentes conexas.

Ejercicio 8. Encuentre un grafo G que tenga tres vértices u, v y w tales que

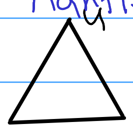
$$\kappa(G - u) = \kappa(G), \qquad \kappa(G - v) > \kappa(G), \qquad \kappa(G - w) < \kappa(G).$$

↳ # Componentes conexas

Rel. de equivalencia: $a \sim b$ si existe un cno. de a a b
Componentes conexas: clases de equivalencia.

Ejemplos: G

Mantiene κ

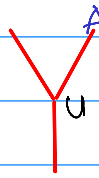


$\kappa(G) = 1$

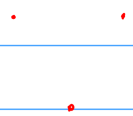
G-u

$\kappa(G-u) = 1$

Aumenta κ

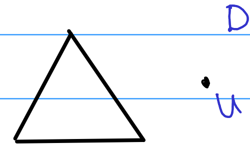


$\kappa(G) = 1$

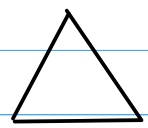


$\kappa(G-u) = 3$

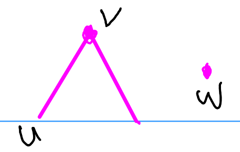
Disminuye κ



$\kappa(G) = 2$



$\kappa(G-u) = 1$



$\kappa(G) = 2$

$\kappa(G-w) = 1$

$\kappa(G-v) = 3$

$\kappa(G-u) = 2$

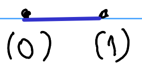
Ejercicio 11. (Examen marzo 2001)
El hipercubo H_n de dimensión n, es el grafo cuyos vértices son las n-uplas de ceros y unos, tales que dos n-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas, por ejemplo $(0, 0, \ldots, 0)$ es adyacente a $(1, 0, \ldots, 0)$ pero no a $(1, 0, \ldots, 0, 1)$.

~~a.~~ Halle los conjuntos de vértices de H_1, H_2, H_3 y dibuje dichos grafos.
~~b.~~ ¿Cuántos vértices y aristas tiene H_n?
~~c.~~ Halle 2 caminos simples en H_5 de $(0, 0, 1, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1, 0)$.
~~d.~~ Demuestre que H_n no tiene 3–ciclos.
e. ¿Cuántos 4–ciclos tiene H_n? (*Sugerencia*: cuente cuántos 4–ciclos pasan por un vértice fijo.)

$v = (v_1, \ldots, v_n)$ $\quad v_i \in \{0,1\}$ $\quad$ Ej: en $n=3$: $(0,0,1)$ y $(0,1,1)$ son adyacentes.
$(1,0,1)$ y $(0,0,0)$ no son adyacentes

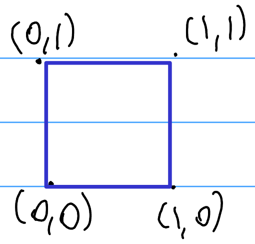
(a)

H_1



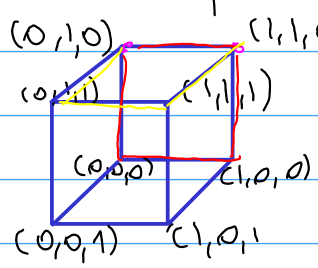
2v y 1a

H_2



4v y 4a

H_3



8v y 12a

(b)

Vértices: $v = (v_1, \ldots, v_n)$ y cada v_i puede valer 0 o 1

Entonces hay 2^n vértices

Aristas: Sea $v \in V$, hay exactamente n vértices adyacentes a v (uno por cada coordenada). Entonces $gr(v) = n$.

Por Teorema $\sum_{v \in V} gr(v) = 2|E|$.

$$\Rightarrow 2|E| = \underbrace{\sum_{v \in V} n}_{n + n + \cdots + n \ (|V| \text{ veces})} = |V| \cdot n = 2^n \cdot n \Rightarrow \text{hay } 2^{n-1} \cdot n \text{ aristas.}$$

Verifiquemos en H_1, H_2, H_3:

H_1: $V = 2$ ✓ $E = 2^0 \cdot 1 = 1$ ✓

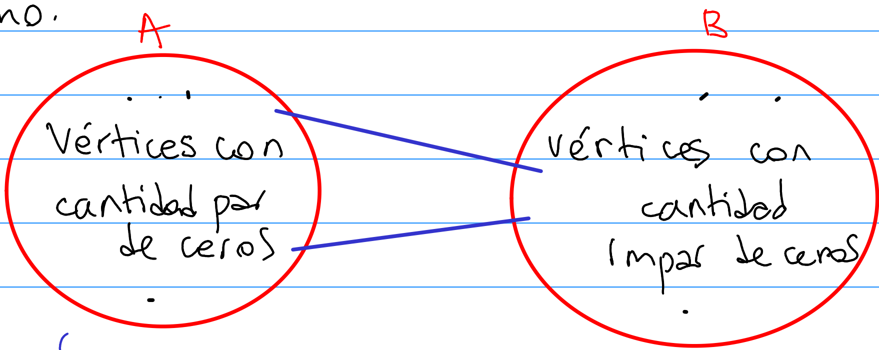
H_2: $V = 2^2$ ✓ $E = 2^1 \cdot 2 = 4$ ✓

H_3: $V = 2^3$ ✓ $E = 2^2 \cdot 3 = 12$ ✓

(c) c_1: $((0,0,1,1,0), (0,0,0,1,0))$

c_2: $((0,0,1,1,0), (0,0,1,0,0), (0,0,0,0,0), (0,0,0,1,0))$

(d) Obs: en un cno. de 3 aristas cambiamos tres coordenadas $\Rightarrow$ no podemos tener un cno. de largo 3 de un vértice en si mismo.



Tenemos un grafo bipartito $\Rightarrow$ no tenemos caminos de largo impar de A en A