Grafos

V: cjto vértices

E: cjto. aristas

$ext(\alpha) = \{v_1, v_2\}$

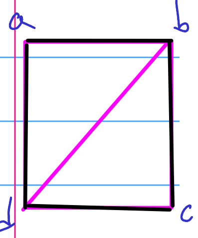
Camino: secuencia de vértices $(v_0, \dots, v_k)$ donde $\{v_i, v_j\}$ es arista.

$v_0 \neq v_k$ $\quad$ $v_0 = v_k$

Tabla 11.1

Vértice(s) repetido(s)	Arista(s) repetida(s)	Abierto	Cerrado	Nombre
Sí	Sí	Sí		Camino (abierto)
Sí	Sí		Sí	Camino (cerrado)
Sí	No	Sí		Recorrido
Sí	No		Sí	Circuito
No	No	Sí		Camino simple
No	No		Sí	Ciclo

excepto los extremos

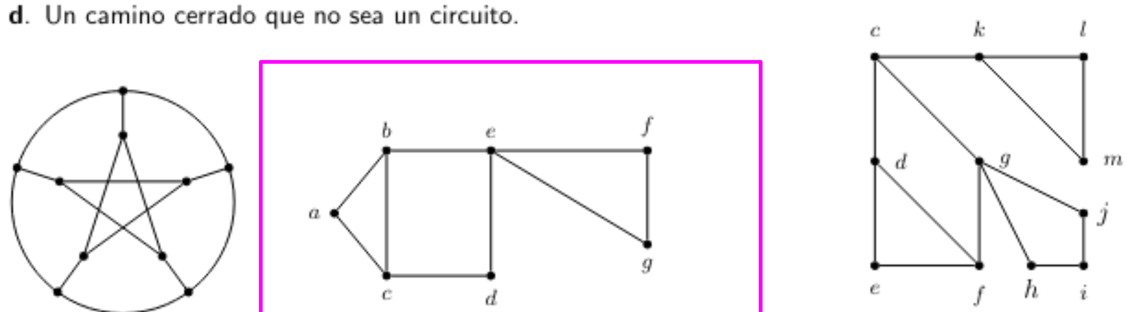


ej:
(a,b,c,d,a) camino cerrado de a en a

(a,b,c,d) es un camino abierto de a en d

Ejercicio 1. Para el grafo de la Figura 1 (ii), determine:

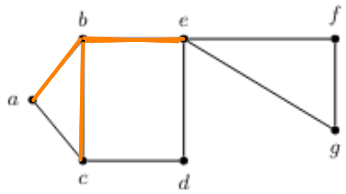
- **a.** Un camino abierto que no sea un recorrido.
- **b.** Un recorrido que no sea camino simple.
- **c.** Un camino simple de b a d de longitud 3.
- **d.** Un camino cerrado que no sea un circuito.
- **e.** Un circuito que no sea un ciclo.
- **f.** Todos los ciclos que pasan por b.
- **g.** Todos los caminos simples de b a f.



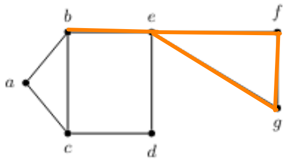
(i) Grafo de Petersen $\quad$ (ii) $\quad$ (iii)

Figura 1:

(a)



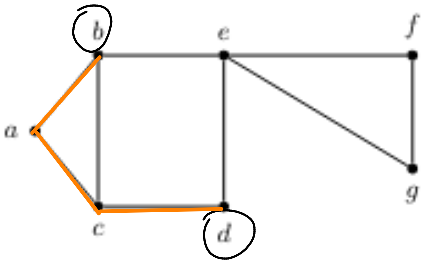
(a, b, e, b, c) ⇝ Repite $\{b, e\}$ entonces no es recorrido.

(b) 

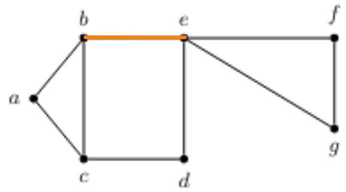
Queremos un camino que no repita arista pero si vértice.

(b, e, f, g, e)

longitud de un camino: cantidad de aristas que lo conforman $\log(v_0, v_1, \ldots, v_k) = k$

(c) 

(b, a, c, d)

(d) 

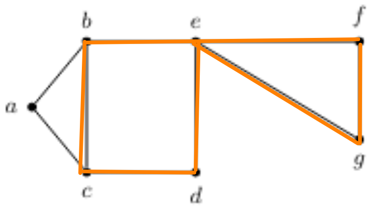
Camino que empiece y termine en el mismo vértice y que repita alguna arista.

(e, b, e)

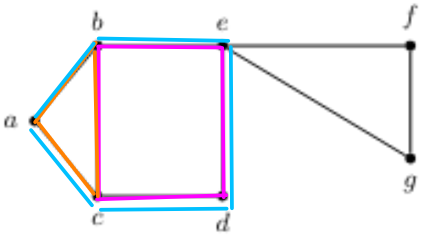
(a, b, e, b, c, a)

$\{e, b\} = \{b, e\}$

(e) Camino cerrado que no repita arista pero si vértice



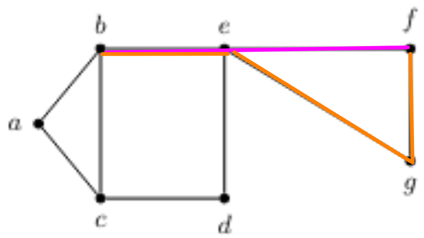
(b, e, f, g, e, d, c, b)

(f) 

(b, e, d, c, b), (b, c, d, e, b)

(b, a, c, b), (b, c, a, b)

(b, a, c, d, e, b), (b, e, d, c, a, b)

(g) 

(b, e, f)

(b, e, g, f)

(b, c, d, e, f)

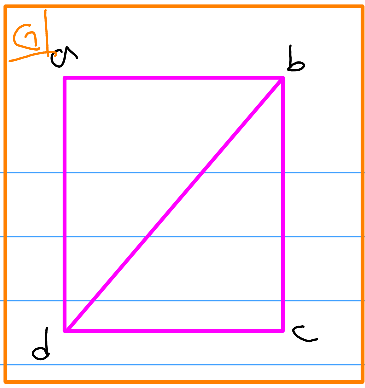
(b, a, c, d, e, f)

(b, c, d, e, g, f)

(b, a, c, d, e, g, f)

Distancia entre dos vértices: largo del camino mas corto

$d(x,y) = \min\{k :$ hay un camino de largo $k\}$



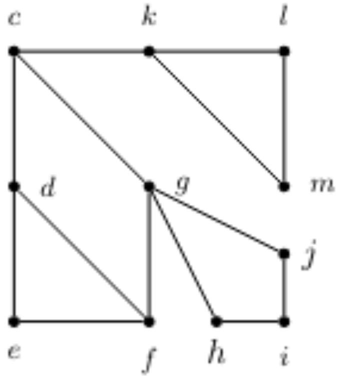
Diametro de un grafo: mayor distancia entre dos vértices

$\operatorname{diam} G = \max\{d(x,y) : x,y \in V\}$

En el ejemplo: todas las distancias son 1 excepto por $d(a,c)=2$.
Entonces $\operatorname{diam}(G) = 2$

Ejercicio 2:

(a)

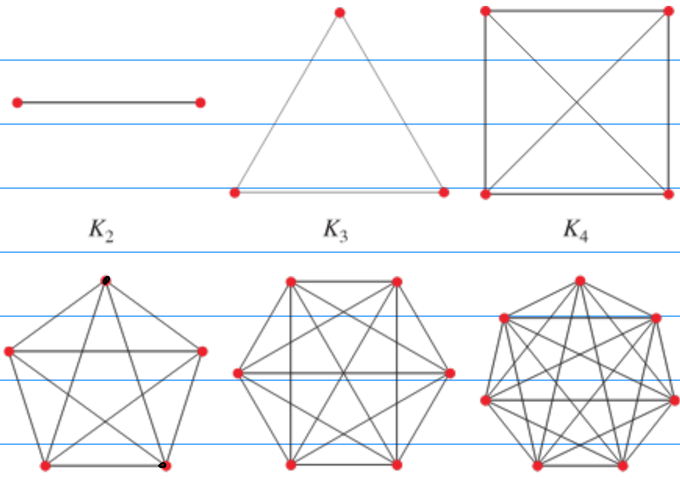


$d(d,f) = 1$
$d(d,g) = 2$
$d(d,h) = 3$
$d(d,i) = 4$
⋮

b. Halle el diámetro de K_n, $K_{n,m}$, P_n, C_n y del grafo de Petersen (Figura 1(i)).

(b)

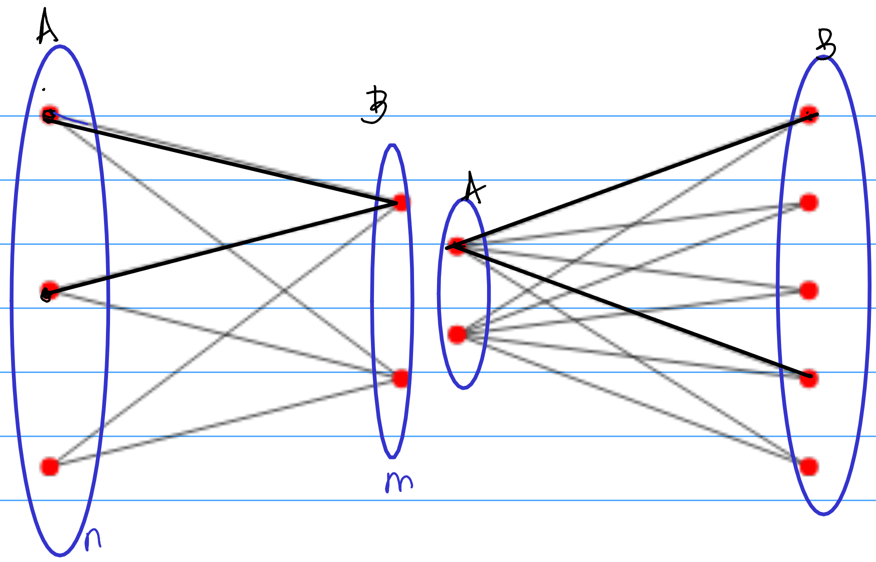
K_n: Grafo Completo con n vértices



K_2 K_3 K_4

K_5 K_6 K_7

$d(x,y) = 1 \quad \forall x,y \in V \Rightarrow \operatorname{diam} = 1$

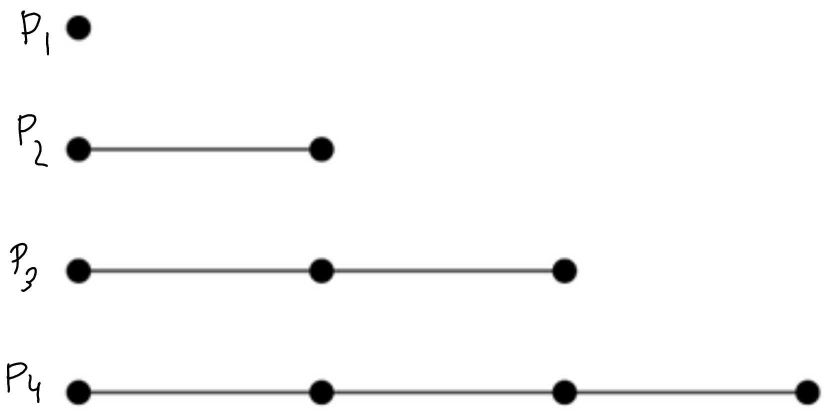


$K_{n,m}$: grafo bipartito completo.

$d(x,y)=2$ si $x \in A$ e $y \in B$

$d(x,y)=1$ si $x,y \in A$ o $x,y \in B$

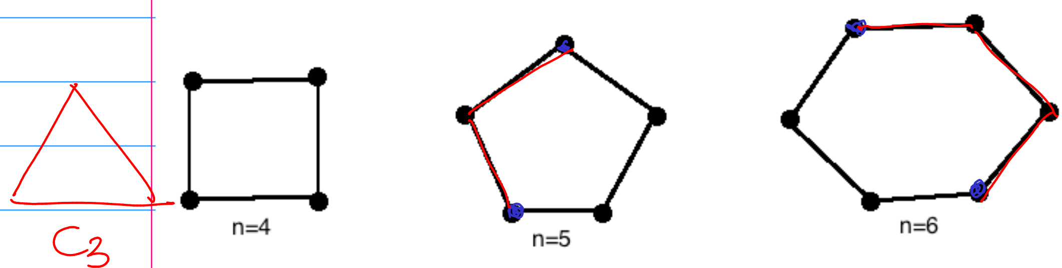
$\Rightarrow diam(K_{n,m})=2$.



P_n: grafo lineal

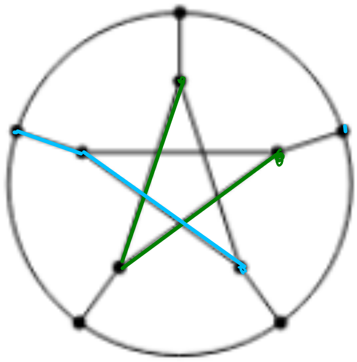
$diam(P_n) = n-1$

C_n: ciclo con n vértices



La distancia entre dos vértices es $\leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (y hay 2 vértices a esa distancia)

$\Rightarrow diam(x,y) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

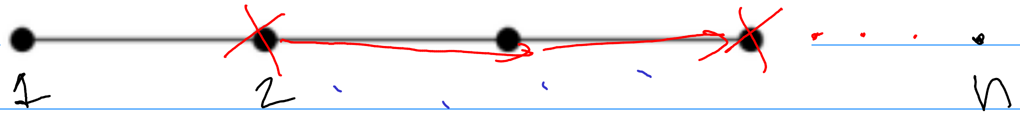


(i) Grafo de Petersen

diam $G = 2$

c. ¿Cuántos caminos simples tienen P_n y $K_{1,n}$?

P_n.



Fijos $a, b \in V$ existe un único camino simple de a en b.

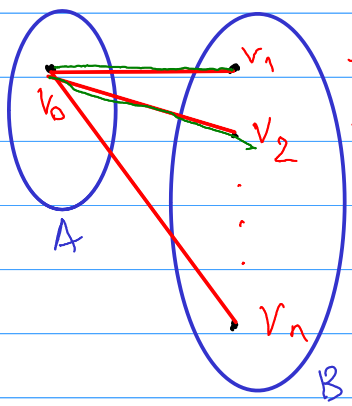
$\Rightarrow$ # Cnos simples = # pares $(a,b) \in V \times V$
$= n^2$

(hay un camino trivial por cada vértice)

($n(n-1) + n$ caminos simples)
triviales

$K_{1,n}$

cnos. simples con $v_0 \in A$, $v_k \in B$



- Caminos de A en B: n
- Caminos de B en A: n
- Caminos de A en A: 1
- Caminos de B en B: n^2

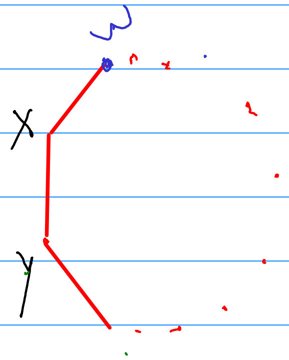
$n^2 + 2n + 1$

Sean $v_i, v_j \in B \Rightarrow$ el único cno. simple de v_i a v_j es
(v_i, v_0, v_j)

⇒ con el mismo razonamiento que para P_n la cant. total de caminos que comienzan y terminan en B es $n^2(n(n-1) + \underbrace{n}_{\text{triviales.}})$

Ejercicio 3. (1^er parcial 2017) Sean x e y dos vértices adyacentes de C_{20}. ¿Cuántos caminos de largo 11 empiezan en x y terminan en y?

$\underline{C_{20}}$



Ejemplo: $(x, w, x, w, x, w, x, w, x, w, x, y)$

Me quiero mover una pos. en sentido antihorario.

⇒ Si nos movemos en sentido horario 5 veces tenemos que movernos 6 en sentido antihorario

Entonces hay tantos cnos. como palabras con las letras AAAAAA HHHHH distintas:

$$\frac{11!}{5!\,6!} = C^{11}_{6}$$

Ejercicio 9. Un hombre debe cruzar un perro, una oveja y una bolsa de repollos, a la otra margen del río, por medio de una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez. Además, no se puede dejar al perro sólo con la oveja ni a la oveja sola con la bolsa de repollos.

a. ¿Cómo se podrá hacer?

b. ¿Puede el hombre realizar el proceso si ha de hacer exactamente 20 viajes? (Un viaje es ir de una margen del río a la otra).

Sugerencia: asociar a cada disposición factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un solo viaje.

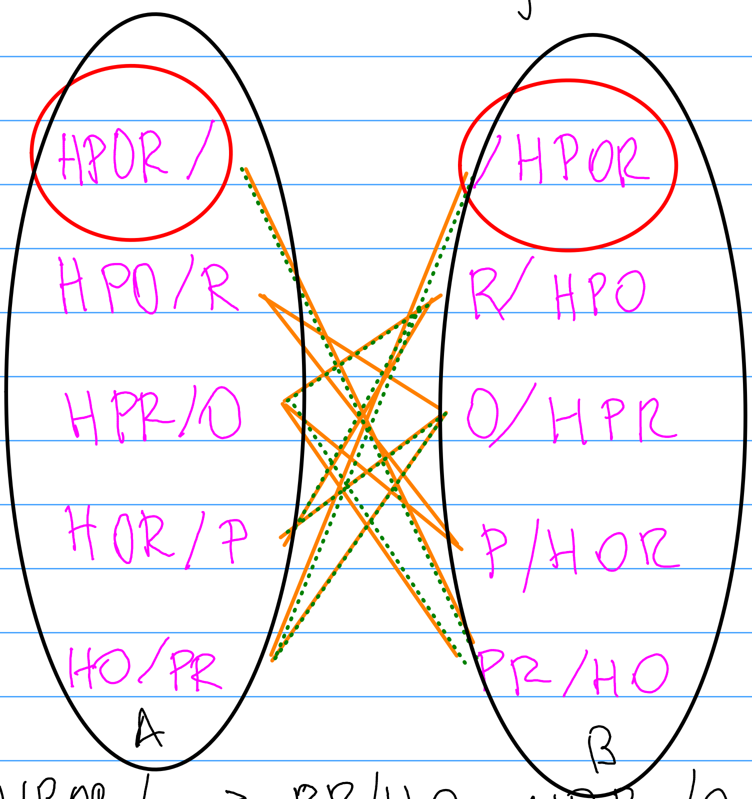
Notación:

HPOR /

HP/OR

un lado del río — el otro

Obs: no podemos pasar de una disposición con H a la izquierda a otra con H a la izq en un solo viaje.



HPOR/ $\xrightarrow[1]{}$ PR/HO $\xrightarrow[2]{}$ HPR/O $\xrightarrow[3]{}$ R/HPO $\xrightarrow[4]{}$ HOR/P $\xrightarrow[5]{}$

O/HPR $\xrightarrow[6]{}$ HO/PR $\xrightarrow[7]{}$ /HPOR

Tenemos un grafo bipartito $\Rightarrow$ un camino que comienza en $v_0 \in A$ y termina en $v_k \in B$ tiene largo impar.

$$(a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_k, b_k)$$

$\hookrightarrow$ Cantidad par de vértices.

$\Rightarrow$ Cantidad impar de aristas

en particular no hay camino con 20 aristas.