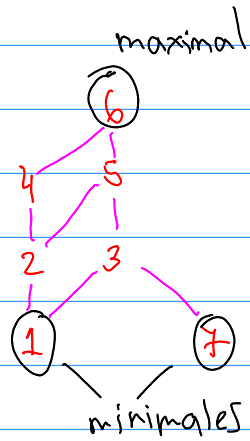
Algunas definiciones:

Sea $(A, \leq)$ un orden parcial $\Rightarrow$

Elemento minimal: $m \in A \,/\, \forall a \in A,\ a \neq m \quad a \not\leq m$

Elemento maximal: $M \in A \,/\, \forall a \in A \quad a \neq M \quad M \not\leq a$

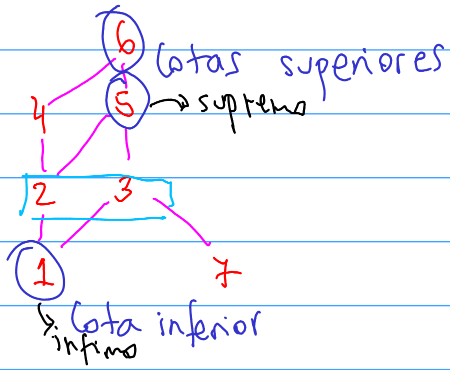


Sea $B \subseteq A$ un subconjunto

Cota inferior: $a \in A \,/\, a \leq b \quad \forall b \in B$

Cota superior: $a \in A \,/\, b \leq a \quad \forall b \in B$

$B = \{2, 3\}$

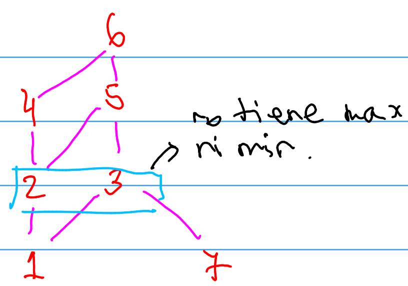


Supremo de B: (la menor de las cotas superiores) $a \in A \,/\, a$ es cota superior y $a \leq s \quad \forall s$ cota superior.

Ínfimo de B: (la mayor de las cotas inferiores) $a \in A \,/\, a$ es cota inferior y $s \leq a \quad \forall s$ cota inferior.

Mínimo de B: $m \in B \,/\, m \leq b \quad \forall b \in B$

Máximo de B: $M \in B \,/\, b \leq M \quad \forall b \in B$



Retículo: A es retículo si existe $\sup\{a,b\}$ e $\inf\{a,b\}$ $\forall a, b \in A$.

Ejercicio 15:

(a) $A = \{1,2,3,4,12\}$ Orden: divisibilidad

$\exists$ sup$\{1,4\}$ e inf$\{1,4\}$

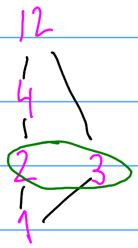
CotSup $= \{4,12\}$

Supremo $= 4$

CInf $= \{1\}$

Ínfimo $= 1$

(análogo: para cualquier par de elementos en $\{1,2,4,12\}$ existe el sup e ínf)



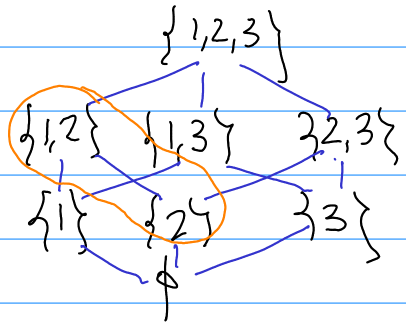
¿$\exists$ sup $\{2,3\}$ e inf $\{2,3\}$?

CotSup $= \{12\}$ $\rightsquigarrow$ supremo $= 12$

Cot Inf $= \{1\}$ $\longrightarrow$ ínfimo $= 1$

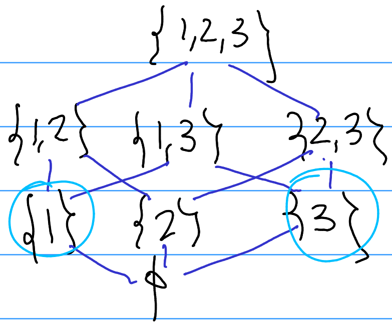
$\Rightarrow$ Es retículo.

(b)



CotInf $= \{\phi, \{2\}\}$ ínfimo $= \{2\}$ $\hookrightarrow$ es mínimo

CotSup $= \{\{1,2,3\}, \{1,2\}\}$ supremo $= \{1,2\}$ $\hookrightarrow$ es máximo.



CotInf $= \{\phi\}$ ínfimo $= \phi$

Cot Sup $= \{\{1,2,3\}, \{1,3\}\}$ supremo $= \{1,3\}$

... es un retículo.

Ejercicio 13. ¿Cuáles de los diagramas de Hasse de la Figura 1 representa un retículo?

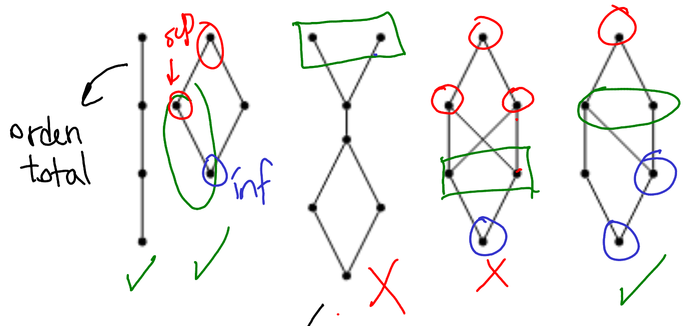
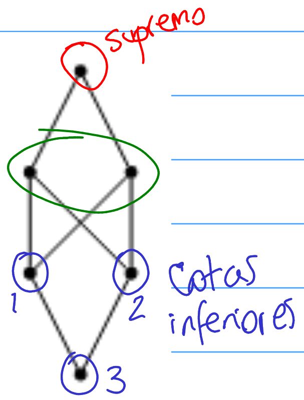


Figura 1:

¿hay 2 elem max ⇒ no es retículo



¿Hay ínfimo? No

$1 \nleq 2 \Rightarrow 2$ no es inf.

$2 \nleq 1 \Rightarrow 1$ no es inf

$1 \nleq 3 \Rightarrow 3$ no es inf

Ejercicio 8. Un orden parcial $(A, \leq)$ es un *buen orden* si todo subconjunto no vacío de A tiene mínimo.

(a) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un buen orden entonces es un orden total.

(b) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un orden total entonces tiene a lo sumo un elemento maximal.

(c) Concluir que si un orden parcial $(A, \leq)$ tiene dos elementos maximales distintos o dos minimales distintos entonces no es un buen orden.

Orden total: $\forall x, y \in A$: $x \leq y$ o $y \leq x$ (dos elem. cualquiera son comparables)

(a) Sean $x, y \in A$, queremos probar que $x \leq y$ o $y \leq x$.

Sea $B = \{x, y\}$, como A es buen orden y B es no vacío $\Rightarrow$ B tiene mínimo $\Rightarrow$ x es mínimo $(x \leq y)$ o y es mínimo $(y \leq x)$. ∎

(b) Sean $M_1, M_2 \in A$ maximales, queremos ver que $M_1 = M_2$.

A es un orden total, entonces $M_1 \leq M_2$ o $M_2 \leq M_1$

M_1 es maximal: $M_2 = M_1$

M_2 es maximal: $M_2 = M_1$ ∎

(c) 2 elementos maximales $\not\exists$ $\underset{(b)}{\Rightarrow}$ no es orden total $\underset{(a)}{\Rightarrow}$ no es buen orden

(Análogo para elementos minimales)

Ejercicio 9. Demostrar que en un conjunto con 61 personas hay al menos 13 personas cada una de las cuales desciende de la siguiente (A) o hay un al menos 6 personas tales que ninguna de ellas desciende de otra (B).

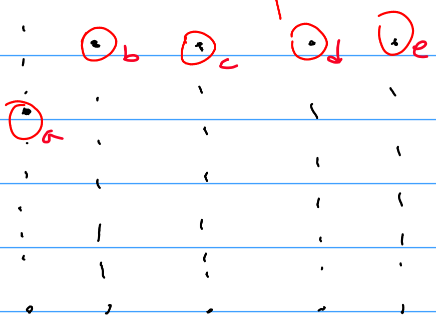
A = cjto personas.

Orden: $a \leq b$ si a desciende de b

Queremos ver que si no hay 6 personas / ninguna de ellas desciende de otra $\Rightarrow$ hay una cadena de 13 elementos.

Hay máximo 5 elem. no comparables entre ellos (anticadena)

ejemplo de elem. no comparables (ninguno desciende del otro) $\leftarrow$



$\rightsquigarrow$ no puede haber más de 5 en un mismo nivel.

Luego podemos usar Palomar y ver que hay una cadena con al menos $\left\lfloor \frac{61}{5} \right\rfloor = 13$ elementos.

———— o ———— o ————

En vez de ver: si no pasa B entonces pasa A podemos ver si no pasa A entonces pasa B.

Es la misma idea, si no hay cadenas con 13 elem $\Rightarrow$ a lo más tienen 12 $\Rightarrow$ si tuviéramos menos de 5 elem. en cada nivel tendríamos a lo sumo $12 \cdot 5 = 60$ personas.