Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir las clases de equivalencia de la relación:

(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

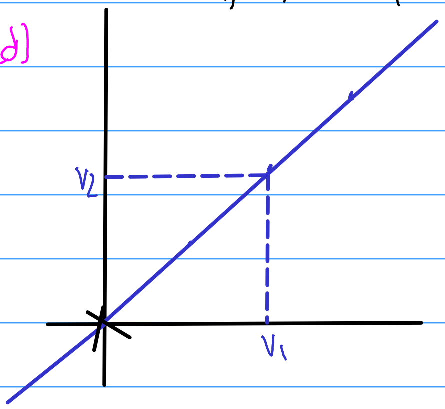
(b) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es un número par.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es múltiplo de 10.

(d) $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$, con $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$a(v_1,v_2) = (av_1, av_2)$

(d)



Reflexiva: $v=(v_1,v_2)$. ¿$\exists\, a \in \mathbb{R}$ $(v_1,v_2)=a(v_1,v_2)$?
Tomo $a=1$ ✓

Simetrica: vRw ¿wRv?
vRw: $\exists\, a \neq 0 /\ (w_1,w_2) = a(v_1,v_2)$ $\left((v_1,v_2) = \frac{1}{a}(w_1,w_2)\right.$
Quiero $b \in \mathbb{R}$ / $(v_1,v_2) = b(w_1,w_2)$
tomo $b = \frac{1}{a}$ ✓

Transitividad: vRw y wRu ¿vRu? Quiero c tal que $u = c \cdot v$
Por (1) $\exists\, a$ $w=av$, Por (2) $\exists\, b$ $u=bw$
Entonces $u=bw=bav$. Tomamos $c=ba$ ✓

$[(v_1,v_2)] = \{ a(v_1,v_2) : a \in \mathbb{R} \text{ no nulo} \}$

Rel. de eq: $R \subseteq A \times A$ reflexiva, sim, transitiva.

Diagramas de Hasse:

<u>Orden</u>: relación $\leq \subseteq A \times A$ reflexiva, antisimétrica y transitiva.

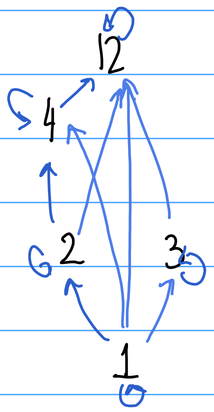
Ejercicio 1. Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibujar el diagrama de Hasse.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii y es múltiplo de x).

(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

(a) Grafo de $\leq$: (a, b) es arista si aRb (si $a|b$)

(Si aRb y bRa con $a \neq b \Rightarrow$ no hay antisimetría)

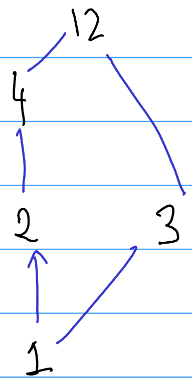


eliminamos lazos

eliminamos el sentido de las aristas ($aRb \Rightarrow a$ está abajo)

Diagrama de Hasse asociado al orden $\leq$:

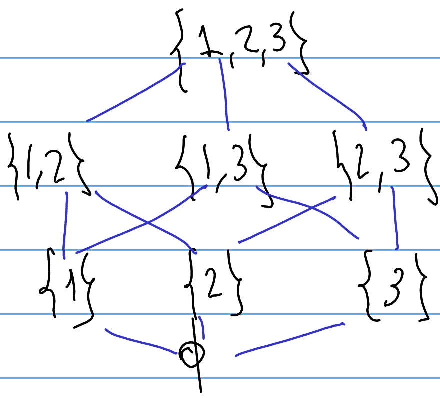
por transitividad eliminamos aristas...



aRb si "tengo un camino de a a b que sube"

(b) $\{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

<u>Orden</u>: $S \leq S'$ si $S \subseteq S'$

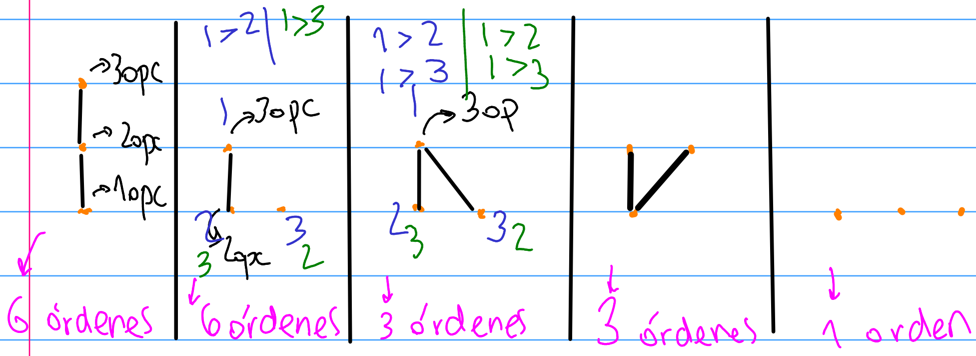


$\{1,2,3\}$ no puede estar en la tercera fila porque $\phi < \{1\} < \{1,2\} < \{1,2,3\}$

tengo un elemento intermedio.

Ejercicio 3. Calcular la cantidad de relaciones de orden definidas en $\{1,2,3\}$.

Contemos diagramas de Hasse para $A=\{1,2,3\}$.

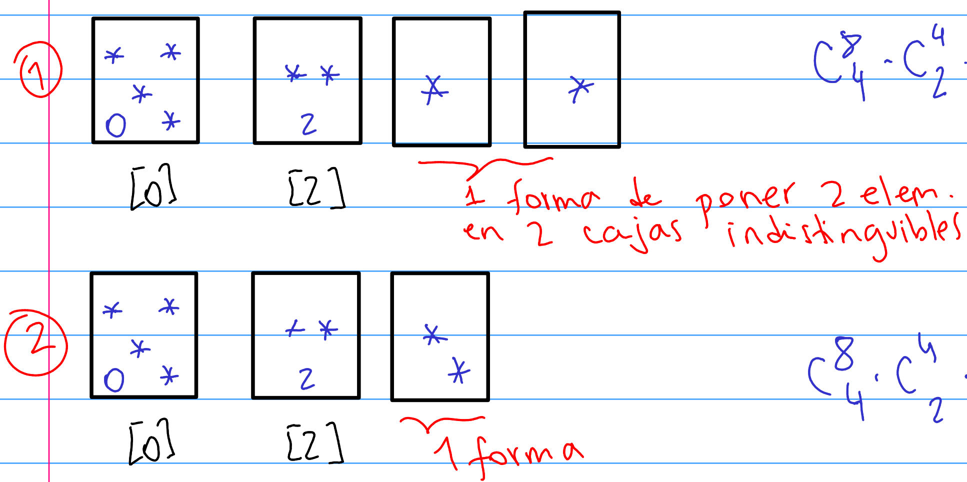


Total : $6+6+3+3+1 = 19$ relaciones de orden.

Ejercicio 12. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R sobre el conjunto $A=\{0,\ldots,9\}$ con $\#[0]=5$ y $\#[2]=3$.

Queremos contar particiones de A donde el 0 está en un cjto. de 5 elementos y el 2 en uno de 3.

Hay 2 opciones:



(1) $C^8_4 \cdot C^4_2 \cdot 1$

(2) $C^8_4 \cdot C^4_2 \cdot 1$

En total hay $2 \cdot C^8_4 \cdot C^4_2$ relaciones de equivalencia en A.

Ejercicio 11.

a. Halle el número de relaciones de equivalencia en $\{1,2,3,4\}$ que contienen a la relación $\{(1,2);(3,4)\}$.

b. Ídem para relaciones de orden.

(a)

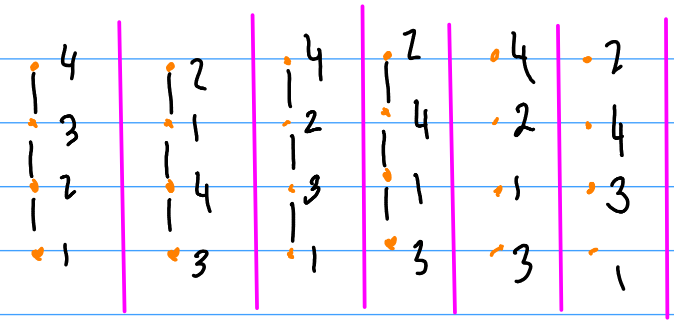
Hay opciones

(a) $\boxed{1\,2}$ $\boxed{3\,4}$

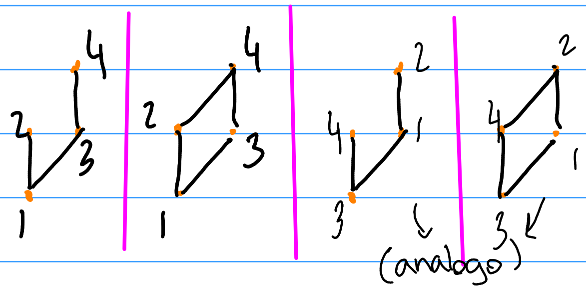
(b) $\boxed{\begin{matrix}1\,2\\3\,4\end{matrix}}$

2 relaciones de equivalencia

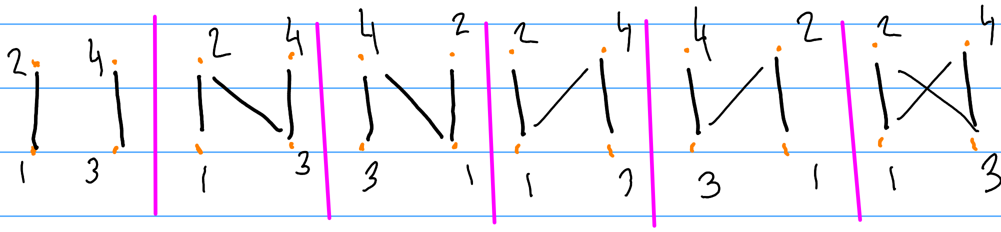
(b)



4 filas



3 filas



2 filas

¿Hay más?