Práctica 10: Relaciones.

Una relación de A en B es un subconjunto $R \subseteq A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$

Ejemplo: $R_= := \{(x,x) : x \in \mathbb{N}\}$

$R_< := \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x < y\}$

Una relación $R \subseteq A \times A$ es:

Reflexiva: aRa $((a,a) \in R)$

Simétrica: $aRb \Rightarrow bRa$ si $a \neq b$ $a \not R b \Rightarrow b \not R a$

Antisimétrica: aRb y $bRa \Rightarrow a = b$ $(1 \leq a$ y $a \leq 1 \Rightarrow a = 1)$

Asimétrica: $aRb \Rightarrow b \not R a$ $(1 < a \Rightarrow a \not< 1)$

Transitiva: aRb y $bRc \Rightarrow aRc$ $\exists a \in A$ y $b \in A$ / aRb, bRa y $a \neq b$

$\forall a, b \in A$.

$(\nexists a, b \in A$ / aRb y $bRa)$

Ejercicio 1. Determine si las siguientes relaciones son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas ($(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$) o transitivas en $A = \{1,2,3,4\}$:

a. $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$.

b. $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$.

c. $R = \{(1,3), (1,1), (3,1), (1,2), (3,3), (4,4)\}$.

d. $R = \emptyset$.

e. $R = A \times A$.

$R \subseteq A \times A$ $A = \{1,2,3,4\}$

a) Reflexiva ✓

Simétrica ✓

Antisimétrica: ✗ $(1,2) \in R$ y $(2,1) \in R$ pero $2 \neq 1$.

Asimétrica: ✗ $(1,2) \in R$ y $(2,1) \in R$

Transitiva: ✓

d) $\emptyset \subseteq A \times A$

Reflexiva: ✗ $(1,1) \notin R$

Simétrica: ✓

Antisimétrica: ✓

Asimétrica: ✓

Transitiva: ✓

e) $R = A \times A$

Reflexiva: ✓

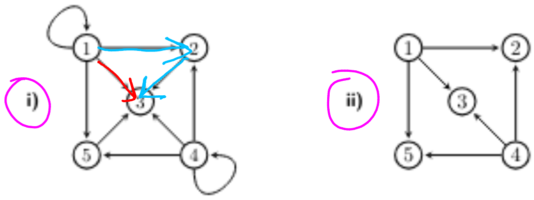
Simétrica: ✓

Antisimétrica: ✗ $(1,2) \in R$ $(2,1) \in R$ $2 \neq 1$

Asimétrica: ✗ $(1,2) \in R$ pero $(2,1) \in R$

Transitiva: ✓

Ejercicio 2. Determine si las relaciones siguientes son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, donde cada relación se representa en un grafo dirigido (o digrafo):



(1,2)
(1,3)
(1,5)
(4,3)
(4,2)
(4,5)

(a,b) (b,c) $\Rightarrow$ (a,c)

(i)

aRb si la arista (a,b) está en el grafo.

Reflexivo: $\forall a \in A$ $(a,a) \in R$ Ej: $(2,2) \notin R$ X

Simétrica: $1 \rightarrow 2$ 1R2 pero $2 \not R 1$.   X

Antisimétrica: ✓ (aRb y bRa) soamente para $\begin{cases} a=b=1 ✓ \\ a=b=4 ✓ \end{cases}$

{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)} R y Antisimétrica

{(1,1)} No Reflexiva Antisimétrica

{(1,2), (2,1 (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)} Reflexiva y no Antis.

{(1,2) (2,1)} No antisimétrica, no reflexiva

aRb y bRa $\Rightarrow$ a=b

1R2 y 2R1 $1 \neq 2$

Asimétrica: X   1R1

Transitiva: ✓

(ii) Reflexiva: X

Sim: X

Anti: ✓

Asimétrica: ✓

Transitiva: ✓

Comentario: sea $R \subseteq A \times A$ una relación.

Si queremos ver que la relación es antisimétrica tenemos que ver que para todo par $(a,b) \in R$, si (b,a) también está en $R \Rightarrow a=b$

(Es decir, si $a \neq b$ no podemos tener a (a,b) y (b,a) simultaneamente en R)

$\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),\cancel{(2,1)}\}$

Sin embargo, si queremos probar que una relación <u>no</u> es antisimétrica basta con dar un par $(a,b) \in R$ con $a \neq b$ tal que $(b,a) \in R$.

Ejemplo: $\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,3)\}$ no es antisimétrica en $A=\{1,2,3\}$ pero $\{(1,2),(2,2),(3,3),(1,1)\}$ sí.

¿Qué pasa si en R no hay pares (a,b) con $b \neq a$?

Si $(a,b) \in R \Rightarrow a=b$ pues en R solo hay pares de la forma $a=b$.
No hay nada más que chequear, la antisimetria se cumple.

Ejemplo: $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ también es antisimétrica.

$A=\{1,2,3\}$ $\quad R\subseteq A\times A$

Ejercicio 3. Considere el conjunto de propiedades $P=\{$reflexiva, simétrica, transitiva$\}$. Para cada subconjunto T de P, encuentre una relación que cumpla las propiedades de T y no cumpla las de $P\setminus T$.

R, T, S: (igualdad) $R=\{(a,a): a\in A\}=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

aRb si $a=b$

R y T pero no S: $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3)\}$ ✓

(Otra: $\leq$: $\{(a,b)\in R$ si $a\leq b\}=\{(1,2),(2,3),(1,3),(1,1),(2,2),(3,3)\}$)

R y S pero no T: $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1),(3,2),(2,3)\}$

$1R3$ y $3R2$ pero $1\not R 2$.

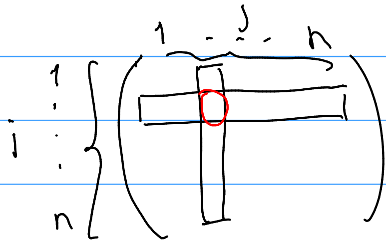
Ejercicio 6. ¿Cuántas relaciones binarias

(a) reflexivas, (b) simétricas, (c) antisimétricas;

son definibles sobre un conjunto con n elementos?

$A=\{a_1,\dots,a_n\}$

Definimos la matriz asociada a $R\subseteq \boxed{A\times A}$ como sigue



entrada en la fila i columna j

$$M_{ij}=\begin{cases}0 & \text{si } a_i \not R a_j\\ 1 & \text{si } a_i R a_j\end{cases}$$

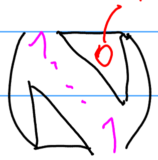
$A=\{1,2,3\}$ $\quad R=\{(a,b): a\leq b\}$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3\\ \hline 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 1\end{array}$$

(a) Una relación es reflexiva si y solo si todas las entradas de su diagonal son 1: $M_{ii}=1$

M_{ij} < 0, 1 si $i\neq j$

1 o 0



Hay n elementos fijos $\Rightarrow$ hay n^2-n elementos que pueden tomar valor 0 o 1 $\Rightarrow$ hay 2^{n^2-n} relaciones reflexivas.

$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{22} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix}$ $\left(\underset{\text{fijo}}{a_{11}} \; \underset{\substack{\text{2 opc} \\ 0 \text{ o } 1}}{a_{12}} \; \underset{\text{2 opc}}{a_{13}} \; \underset{\text{2 opc}}{a_{21}} \; \underset{\text{fijo}}{a_{22}} \; \underset{\text{2 op}}{a_{23}} \; \underset{\text{2 opc}}{a_{31}} \; \underset{\text{2 opc}}{a_{32}} \; \underset{\text{fijo}}{a_{33}} \right)$ hay 2^6

$n=3 \Rightarrow n^2-n = 9-3 = 6$

(b) Una relación es simétrica sii su matriz también lo es

$((a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R)$

$\begin{cases} M_{i,j}=1 \Rightarrow M_{j,i}=1 \\ M_{i,j}=0 \Rightarrow M_{j,i}=0 \end{cases}$ $\{ M_{ij}=M_{ji}$.

(Si fuera 1 $\Rightarrow M_{i,j}=1$) ¿

$\begin{array}{c} \qquad n \\ \qquad j \\ i \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \end{array}$

hay $\frac{n^2-n}{2}$ elem. (TOTAL ELEM − DIAGONAL) en el Δ sup. Otra forma de verlo es como $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$

↳ filas con i elem $\forall i<n$

En la diagonal: $M_{ii} <^{0}_{1}$ (n elementos) 2^n

En el Δ superior $(i<j)$: $M_{ij} <^{0}_{1}$ (hay $\frac{n^2-n}{2}$ elementos) $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

En el Δ inferior $(i>j)$ queda determinado por simetría 1

En total hay $2^n \cdot 2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{n^2-n}{2}+n} = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$ relaciones simétricas.

(c) Una relación es antisimétrica si $\forall a\neq b$ si $aRb \Rightarrow b\not R a$.

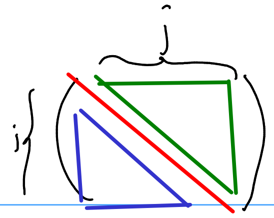
$(aRb \text{ y } bRa \Rightarrow a=b)$

$M_{ij}=1 \Rightarrow M_{ji}=0$

$M_{ij}=0 \Rightarrow M_{ji}=1$ o $M_{ji}=0$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es antisimétrica.

M_{ij} y M_{ji} no pueden ser ambos 1.



En la diagonal: M_{ii} puede tomar valor $\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ $\quad 2^n$

Me fijo en el Δ sup: sea (i,j) $i<j$ hay 3 opciones:

- $M_{ij}=1 \Rightarrow M_{ji}=0$
- $M_{ij}=0$ y $M_{ji}=1$ $\quad 3^{\frac{n^2-n}{2}}$
- $M_{ij}=0$ y $M_{ji}=0$

En total hay $2^n \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$ relaciones antisimétricas.

Ejercicio 10. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia definidas en $\{1,2,3\}$.

Relación de equivalencia $\underset{\sim}{R}$: S, T, R. $\quad R_\sim \subseteq A \times A$

$[a] = \{ b : aR_\sim b \}$

Es lo mismo contar relaciones de equivalencia que particiones del cjto.

$R_\sim$: las clases de equivalencia forman una partición

$A=\{1,2,3\}$ $\quad \underset{\sim}{R} := \{ (a,a) : a \in A \}$

$[1]=\{1\}$ $\quad [2]=\{2\}$ $\quad [3]=\{3\}$

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

A su vez si tenemos una partición de A tenemos una rel. de eq.

$\boxed{}$ $\boxed{}$ ... $\boxed{}$

$aR_\sim b$ si están en un mismo subconjunto (misma cajita)

Si tengo una relación $\Rightarrow$ tengo partición.

$A=\{1,2,3,4\}$ $\quad R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(3,2),(2,3)\}$

$\boxed{1\ 2\ 3}$ $\quad \boxed{4}$

Si doy una part $\Rightarrow$ tengo rel.

$R=\{(1,1),(2,2)(3,3)(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,3),(3,1),(4,4)\}$

$\Rightarrow$ contemos particiones de $A = \{1,2,3\}$

$\boxed{123}$

$\boxed{12}\ \boxed{3}$

$\boxed{13}\ \boxed{2}$

$\boxed{23}\ \boxed{1}$

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$

} hay 5 particiones $\Rightarrow$ hay 5 rel. de eq

Cuestionario: $a_n =$ n° particiones de S_n en cjtos. de 1 o 2 elem.
$S_n = \{0, 1, \dots, n\}$

a_1: $\boxed{0}\ \boxed{1}$ o $\boxed{01}$ } 2 formas $\quad a_1 = 2$

a_2:
$\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{2}$
$\boxed{0}\ \boxed{12}$
$\boxed{02}\ \boxed{1}$
$\boxed{01}\ \boxed{2}$
} 4 formas

⋮

a_{n+1} = supongamos que tengo S_{n+1} $\Rightarrow$ el elem $n+1$:
puede estar en una cajita nueva $\quad \boxed{} \cdot a_n$ ↳ 1 forma

o

puede estar en una cajita con un elemento de S_n. $\quad \boxed{\begin{smallmatrix} n+1 \\ i \end{smallmatrix}} \cdot a_{n-1}$ ↳ $n+1$ opc para i

$a_{n+1} = a_n + (n+1)a_{n-1} \quad \forall n \geq 1$

$a_n = a_{n-1} + n \cdot a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$

Generatrices: $\dfrac{x^7}{\left(1+\frac{x^3}{3}\right)^9} = x^7\left(1+\left(\frac{x^3}{3}\right)\right)^{-9}$

Queremos el coef. de x^6 de $\left(1+\left(\frac{x^3}{3}\right)\right)^{-9}$ $\quad Y = \left(-x^3/3\right)$

El coef. de y^n en $(1-y)^{-9}$ es CR_n^9

$$(1-y)^{-9} = \sum_{n=0}^{\infty} CR_n^9 \, y^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} CR_n^9 \left(-\frac{x^3}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} CR_n^9 \left(\frac{-1}{3}\right)^n x^{3n} \longrightarrow \text{multiplos de } 3$$

Para calcular a_{13} ponemos $n=2$ y tenemos $a_{13} = \dfrac{CR_2^9}{9}$

Para calcular a_{500}: queremos el coef. de x^{493} de $\left(1+\frac{x^3}{3}\right)^{-9}$ pero esa generatriz solo tiene coef. $\neq 0$ cuando el exponente es múltiplo de 3.