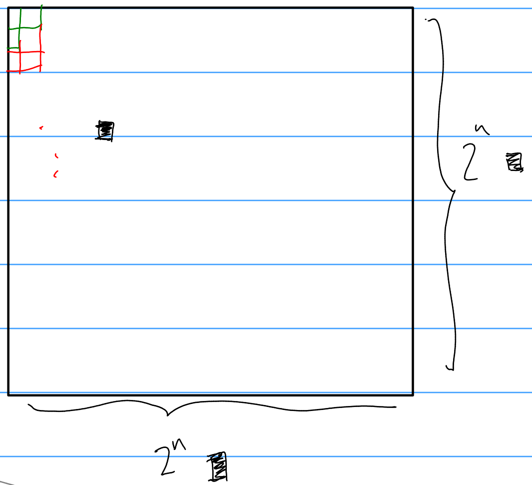
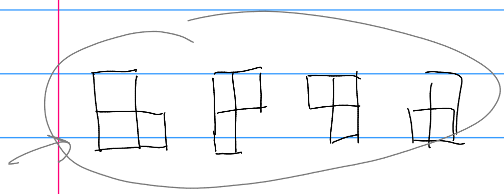
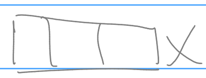
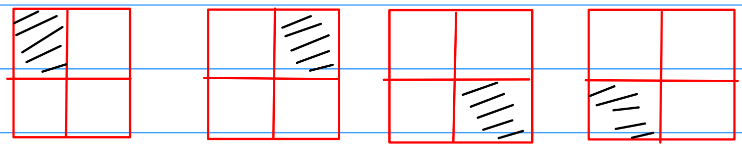
Ejercicio 8. Sea n un número natural tal que $n \geq 1$. Consideremos un tablero cuadrado compuesto por $2^n \times 2^n$ cuadraditos al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demostrar que es posible cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos.







Caso Base $n=1$ (Tablero 2×2)

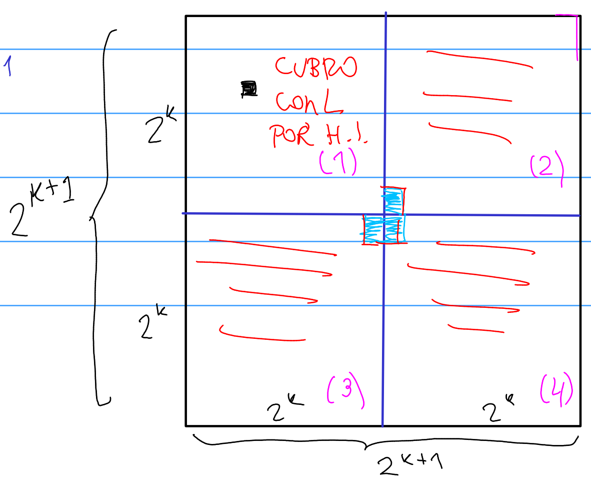


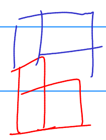
En cualquiera de los casos se puede cubrir el tablero con L.

Paso inductivo: H.I.: Puedo cubrir un tablero $2^k \times 2^k$ al que le falta un □ con piezas en forma de L formadas por 3 □

T.I. Puedo cubrir un tablero $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ al que le falta un □ con piezas en forma de L formadas por 3 □

$2^{k+1} \times 2^{k+1}$
$\shortparallel$
$2 \cdot 2^k$





· Dividimos el tablero en 4 tableros de tamaño $2^k \times 2^k$, llamemoslos (1), (2), (3) y (4)

· Suponemos sin pérdida de generalidad que el que falta está en (1).

· Podemos usar H.I. y cubrir (1) con .

Observación: No sabemos si podemos cubrir (2) (3) y (4) con , para usar la H.I. nos tiene que faltar un cuadradito en cada subtablero.

· Podemos cubrir (2) menos el (abajo izq) por H.I.

· Podemos cubrir (3) menos el (arr. der) por H.I.

· podemos cubrir (4) menos el (arr. izq) por H.I.

· Los tres cuadraditos que nos faltan los cubrimos con una L.

Inducción Fuerte: Sea P una proposición sobre $\mathbb{N}$, tal que

(1) Paso base: $P(n_0)$ es verdadera.

(2) Paso inductivo: H.I. $P(m)$ es verdadera $\forall m: n_0 \leq m < k$

T.I. Entonces $P(k)$ es verdadera.

$n_0 \quad n_0+1 \quad n_0+2 \quad \mathbb{N}$

$P(n_0) \Rightarrow P(n_0+1)$

$P(n_0+1) \Rightarrow P(n_0+2)$

$n_0 \quad n_0+1$

$P(n_0) \Rightarrow P(n_0+1)$

$P(n_0) + P(n_0+1) \Rightarrow P(n_0+2)$

$n_0 \quad n_0+1 \quad n_0+2$

$P(n_0) + P(n_0+1) + P(n_0+2) \Rightarrow P(n_0+3)$

Ejercicio 9. Probar que si $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 30$ y $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n \; \forall n \geq 1$ entonces $a_n \geq 3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

- $a_1 = 3 \geq 3^1$ ✓
- $a_2 = 10 \geq 3^2 = 9$ ✓
- $a_3 = 30 \geq 3^3 = 27$ ✓ (Caso Base)

Hip.: $a_m \geq 3^m \qquad 1 \leq m \leq k+2$

Tesis: $a_{k+3} \geq 3^{k+3}$

Dem. de H.I. $\Rightarrow$ T.I.

$$a_{k+3} = 2a_{k+2} + 7a_{k+1} + a_k$$
$$\geq 2\cdot 3^{k+2} + 7\cdot 3^{k+1} + 3^k$$

Por H.I. $\begin{cases} a_{k+2} \geq 3^{k+2} \\ a_{k+1} \geq 3^{k+1} \\ a_k \geq 3^k \end{cases}$

$$\geq 2\cdot 3^2 \cdot 3^k + 7\cdot 3\cdot 3^k + 3^k$$
$$\geq 3^k(18+21+1)$$
$$\geq 40\cdot 3^k$$

Queremos probar que $a_{k+3} \geq 3^{k+3}$, observemos que $3^{k+3} = 3^3 \cdot 3^k$.
Hasta ahora vimos es $a_{k+3} \geq 40 \cdot 3^k$, basta observar que $40 > 3^3 = 27$

$$a_{k+3} \geq 40\cdot 3^k$$
$$\geq 27 \cdot 3^k$$
$$\geq 3^3 \cdot 3^k$$
$$\geq 3^{k+3}$$

Ejercicio 12. Probar que el Principio del Buen Orden implica el Principio de Inducción Completa sobre los números naturales.

Ppio. del buen orden: Todo cjto. no vacío en $\mathbb{N}$ tiene mínimo.
Sea P una prop tq (1) $P(0)$ es verdadero
(2) $P(k)$ verdadero $\Rightarrow$ $P(k+1)$ verdadero

Entonces $P(n)$ es verdadero $\forall n$.

Dem: Sea P una prop. que cumple (1) y (2), queremos probar que $p(n)$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$ asumiendo el ppio del buen orden.

Por absurdo. Suponemos que $\exists m$ tq $P(m)$ no es verdadero.
Es decir, que $F = \{m : P(m)$ no se cumple$\} \neq \emptyset$. (observar que $P(0)$ es verd. $\Rightarrow n \geq 1$)
Por el ppio. de buen orden F tiene un mínimo $n \in \mathbb{N}$

$n \in F \Rightarrow n$ no cumple P

$n-1 \notin F \Rightarrow n-1$ cumple $P \Rightarrow n-1+1$ cumple P ↯

↑ porque n es el mínimo   H.I.