Práctico 1 - Clase 2. 07/03/24.

Inducción Completa: nos sirve para probar proposiciones que valen $\forall n \geq n_0$.

Sea P una proposición tal que

(A) $P(n_0)$ es cierta (n_0 cumple la ppd P) (Paso base)

(B) Si $P(k)$ es cierta $\Rightarrow P(k+1)$ también lo es. $(k \geq n_0)$. (Paso inductivo)

Entonces $P(n)$ es cierta $\forall n \geq n_0$

Ejercicio 4. Probar que $n^2 \geq n+1$ para todo $n \geq 5$.

Paso base: $n=5$ $\quad 5^2 \geq 5+1$ ✓

$n=2$ $\quad 25 \geq 6$

Paso inductivo: H.I. $\quad k^2 \geq k+1$ para $k \geq 5$ $\quad n=k$

T.I. $\quad (k+1)^2 \geq k+2$ $\quad n=k+1$

Prueba de la tesis inductiva a partir de la hipótesis inductiva:

$$(k+1)^2 = \underbrace{k^2}_{H.I.} + 2k + 1$$
$$\geq k+1 + 2k + 1$$
$$\geq k+2 + 2k$$
$$\geq k+2 \quad \text{porque } k \geq 5 \geq 0$$

∎

¿Qué pasa para $n < 5$?

Se cumple para $n=4$, $n=3$, $n=2$, falla en $n=1$. Además en la prueba de la T.I. sólo usamos $k \geq 0$.

Es decir, cambiando el caso base a $n=2$ tenemos una prueba para $n \geq 2$.

$\cancel{1} \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$

Ejercicio 5. Probar que $2^n \geq n^2$ a partir de cierto natural n_0 que se debe encontrar.

$n_0 = 0$ $\quad 2^0 \geq 0^2$

Veamos que no sale la prueba por inducción.

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

H.I. $2^k \geq k^2 \quad \forall k \geq 0$

T.I. $2^{k+1} \geq (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ $\qquad 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b$

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \underset{H.I}{\geq} 2 \cdot k^2 = k^2 + k^2$

Querríamos probar que $\boxed{k^2 + k^2 \geq k^2 + 2k + 1}$, pero esto no se cumple para $k = 0, 1$ ✗

$\Rightarrow$ con este método no probamos el paso inductivo.

Cambiemos el caso base.

$n_0 = 1$ ✓

$n_0 = 2$ ✓

$n_0 = 3$ $\quad 2^3 \geq 3^2$ ✗
$\quad 8 \geq 9$

C. Base: $n_0 = 4$ $\quad 2^4 \geq 4^2$ ✓
$\quad 16 = 16$

H.I. $\quad 2^k \geq k^2$

T.I. $\quad 2^{k+1} \geq (k+1)^2 = \underline{k^2 + 2k + 1}$

Prueba de la T.I. a partir de la h.i.:

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$ $\quad$ (ppd. potencia)

$\geq 2 \cdot \underbrace{k^2}_{H.I.}$ $\quad$ ($2^k \geq k^2$ por hip. inductiva)

$= k^2 + k^2$

Si probamos que $\boxed{\cancel{k^2} + \underline{k^2} \geq \cancel{k^2} + \underline{2k+1}}$ entonces concluimos que $2^{k+1} \geq k^2 + 2k + 1$.

Probemos esto: $k k \geq 4 k \Rightarrow k^2 \geq 4k$

$\Rightarrow k^2 \geq 2k + 2k$

$\Rightarrow k^2 \geq 2k + 1$ $\quad$ pues $2k \geq 1$.

Ejercicio 6. Probar que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural n.

Caso base: $n=0$ $\quad 7^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ es múltiplo de 5 ✓

Paso inductivo: H.I. $\underbrace{7^k - 2^k}_{\overset{\cdot}{5}} = 5m$ para cierto $m \in \mathbb{N}$.

T.I. $7^{k+1} - 2^{k+1} = 5 . m'$ para cierto $m' \in \mathbb{N}$

Demostración de la T.I. a partir de la H.I.

$$7^{k+1} - 2^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k \quad \text{(ppd pot)}$$
$$= (2+5) . 7^k - 2 \cdot 2^k$$
$$= 2 \cdot \underbrace{(7^k - 2^k)}_{\text{H.I. } \overset{\cdot}{5}} + \underbrace{5 \cdot 7^k}_{\overset{\cdot}{5}} \quad \text{(factor común)}$$
$$= 2 \cdot 5 \cdot m + 5 \cdot 7^k$$
$$= 5\,(\underbrace{2m + 7^k}_{m' = 2m + 7^k})$$