

Inducción Completa: nos sirve para probar proposiciones que valen $\forall n \geq n_0$.

Sea P una proposición tal que

(A) $P(n_0)$ es cierta (no cumple la p.p.d. P) (Paso base)

(B) Si $P(k)$ es cierta $\Rightarrow P(k+1)$ también lo es. ($k \geq n_0$). (Paso inductivo)

Entonces $P(n)$ es cierta $\forall n \geq n_0$

Ejercicio 4. Probar que $n^2 \geq n + 1$ para todo $n \geq 5$.

Paso base: $n=5$ $5^2 \geq 5+1$ ✓
 $n=2$ $25 \geq 6$

Paso inductivo: H.I. $k^2 \geq k+1$ para $k \geq 5$ $n=k$

T.I. $(k+1)^2 \geq k+2$ $n=k+1$

Prueba de la tesis inductiva a partir de la hipótesis inductiva:

$$(k+1)^2 = \underbrace{k^2}_{\text{H.I.}} + 2k + 1$$

$$\geq k+1 + 2k + 1$$

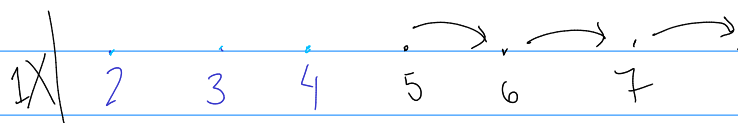
$$\geq k+2 + 2k$$

$$\geq k+2 \quad \text{porque } k \geq 5 \geq 0$$

¿Qué pasa para $n < 5$?

Se cumple para $n=4, n=3, n=2$, falla en $n=1$. Además en la prueba de la T.I. sólo usamos $k \geq 0$.

Es decir, cambiando el caso base a $n=2$ tenemos una prueba para $n \geq 2$.



Ejercicio 5. Probar que $2^n \geq n^2$ a partir de cierto natural n_0 que se debe encontrar.

$$n_0 = 0$$

$$2^0 \geq 0^2$$

Veamos que no sale la ⁰ prueba por inducción.

$$H.1. \quad 2^k \geq k^2 \quad \forall k \geq 0$$

$$T.1. \quad 2^{k+1} \geq (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

$$2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b$$

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot k^2 = k^2 + k^2$$

H.1

Queríamos probar que $k^2 + k^2 \geq k^2 + 2k + 1$, pero esto no se cumple para $k=0, 1$ ✗

\Rightarrow con este método no probamos el paso inductivo.

Cambiamos el caso base.

$$n_0 = 1 \checkmark$$

$$n_0 = 2 \checkmark$$

$$n_0 = 3$$

$$2^3 \geq 3^2 \quad \times$$

$$8 \geq 9$$

C. Base:

$$n_0 = 4$$

$$2^4 \geq 4^2 \quad \checkmark$$

$$16 = 16$$

$$H.1. \quad 2^k \geq k^2$$

$$T.1. \quad 2^{k+1} \geq (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

Prueba de la T.1. a partir de la h.1.:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$$

(ppd. potencia)

$$\geq 2 \cdot k^2$$

($2^k \geq k^2$ por hip. inductiva)

$$= k^2 + k^2$$

[Si probamos que $k^2 + k^2 \geq k^2 + 2k + 1$ entonces concluimos que $2^{k+1} \geq k^2 + 2k + 1$.

$$\text{Probemos esto: } k^2 \geq 2k \Rightarrow k^2 \geq 2k$$

$$\Rightarrow k^2 \geq 2k + 2k$$

$$\Rightarrow k^2 \geq 2k + 1 \quad \text{pues } 2k \geq 1.$$

Ejercicio 6. Probar que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural n .

Caso base: $n=0$ $7^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ es múltiplo de 5 ✓

Paso inductivo: H.I. $\underbrace{7^k - 2^k}_5 = 5m$ para cierto $m \in \mathbb{N}$.

T.I. $7^{k+1} - 2^{k+1} = 5 \cdot m'$ para cierto $m' \in \mathbb{N}$

Demostración de la T.I. a partir de la H.I.

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 2^{k+1} &= 7 \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k && \text{(ppd pot)} \\ &= (2+5) \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot \underbrace{(7^k - 2^k)}_{\substack{\text{H.I. } 5 \\ 5}} + 5 \cdot 7^k && \text{(factor común)} \\ &= 2 \cdot 5 \cdot m + 5 \cdot 7^k \\ &= 5 \cdot \underbrace{(2m + 7^k)}_{m' = 2m + 7^k} \end{aligned}$$



