· cchiesa@fing.edu.uy
· cchiesa01101101@gmail.com.

Práctico 1. Clase 1. 05/03/24

Repaso Teórico: Inducción Completa (Cap. 4 Grimaldi)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

P propiedad definida sobre $\mathbb{N}$. $\left(\begin{array}{l} P_1: \text{ser par} \\ P_2: \text{ser suma de dos cuadrados.} \\ P_3: \sum_{i=1} i = \frac{n(n+1)}{2} \end{array} \right)$ P(n) puede ser verdadera o no

El principio de I.C. sirve para probar propiedades sobre todos los naturales $\mathbb{N}$

Principio de Inducción Completa: P ppd sobre $\mathbb{N}$ tal que

(A) Paso base: P(0) (0 cumple la ppd. P) / P(n_0) para $n_0 \in \mathbb{N}$.

(B) Paso inductivo: $\underset{H.I.}{P(k)} \Rightarrow \underset{T.I.}{P(k+1)}$ / $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ $\forall k \geq n_0$

(Si k satisface la ppd P ⇒ k+1 satisface la ppd. P)

Entonces P(n) $\forall n \in \mathbb{N}$ (n satisface la ppd P $\forall n \in \mathbb{N}$) / P(n) $\forall n \geq n_0$.

0 1 2 3 4 ...

n_0 n_0+1 n_0+2 n_0+3 ...

Ejercicio 1. Probar de dos formas distintas que

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

para todo natural n.

(A) Paso base: $n=0$ $\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$ ✓

(B) Paso inductivo: Hipótesis inductiva: $\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, queremos probar

T.I. $\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Demostración de la T.I. a partir de la H.I.:

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \underbrace{0+1+\dots+k}_{H.I.} + \underbrace{k+1}$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + k+1.$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}.$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Distributiva:

$$(a+b).c = a.c + b.c$$

$$\Rightarrow (k+2)(k+1) = k(k+1) + 2.(k+1)$$

Es decir si $\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, entonces $\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$P(0) \to P(1) \to P(2) \to P(3) \quad \dots \quad P(400) \to P(401) \to P(402)$$

Por P.I.C. $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Otra forma de ver esto. (Método de Gauss).

$n=100$

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + \overset{n-1}{99} + \overset{n}{100}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i = \underset{n}{100} + \underset{n-1}{99} + \underset{n-2}{98} + 97 + \dots + 1 + 0$$

$$2\sum_{i=0}^{n} i = \underbrace{\overset{n}{100} + \overset{n}{100} + \overset{n}{100} + \overset{n}{100} + \dots + \overset{n}{100} + \overset{n}{100}}_{\substack{101 \text{ veces} \\ (n+1) \text{ veces}}}$$

$$= 100 \cdot 101 = n.(n+1)$$

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{100 \cdot 101}{2} = \frac{n.(n+1)}{2}$$

Ejercicio 2 práctico 1: Probar que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Paso base: n=0. $\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0 = \frac{0\cdot(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$ ✓ (se cumple el caso base)

Paso inductivo:

Hipótesis inductiva: $\sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (n=k)

Tesis inductiva: $\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)\overbrace{(2(k+1)+1)}^{=2k+3}}{6}$ (n=k+1)

Tenemos que probar la tesis inductiva asumiendo la hipótesis inductiva como cierta.

Demostración de $\sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \Rightarrow \sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$:

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \underbrace{0^2+1^2+2^2+\dots+k^2}_{H.I.} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)(k+1)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left(k(2k+1) + 6(k+1)\right)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left(2k^2+7k+6\right)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \quad \blacksquare$$

Como probamos el paso base y el paso inductivo, la propiedad $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3. Probar que

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2$$

para todo natural n.

Por el ejercicio 1 $\left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$

$\left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$

$\Rightarrow$ Probaremos que $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$

Caso base: $n=0$ $\sum_{i=0}^{0} i^3 = 0 = \frac{0^2 \cdot (0+1)^2}{4}$ ✓

Paso inductivo: H.I. $\sum_{i=0}^{k} i^3 = \frac{k^2 (k+1)^2}{4}$ (Suponemos vale)

$\Downarrow$

T.I. $\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}$ (Queremos probarlo)

Demostración de la T.I. a partir de la H.I.:

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \underbrace{0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + k^3}_{} + (k+1)^3$$

$$\overset{H.I.}{=} \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{k^2 \cdot (k+1)^2 + 4 (k+1)(k+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 \left(k^2 + 4(k+1)\right)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}$$

$(k+2)^2 = (k+2)(k+2)$
$= k^2 + 2k + 2k + 4$
$= k^2 + 4k + 4$
$= k^2 + 4(k+1)$