

- cchiesa@fing.edu.uy
- cchiesa0110101@gmail.com

Práctico 1. Clase 1.

05/03/24

Repasso Teórico: Inducción Completa (Cap. 4 Grimaldi)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

P propiedad definida sobre \mathbb{N} .

$$\left(\begin{array}{l} P_1: \text{ser par} \\ P_2: \text{ser suma de dos cuadrados.} \\ P_3: \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \end{array} \right) P(n) \text{ puede ser verdadera o no}$$

El principio de I.C. sirve para probar propiedades sobre todos los naturales \mathbb{N} .

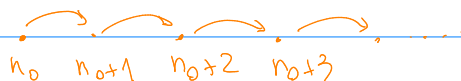
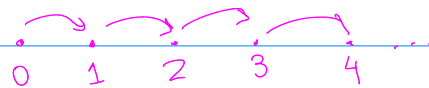
Principio de Inducción Completa: P pdd sobre \mathbb{N} tal que

(A) Paso base: $P(0)$ (0 cumple la pdd. P) / $P(n_0)$ para $n_0 \in \mathbb{N}$.

(B) Paso inductivo: $\forall k, P(k) \Rightarrow P(k+1)$ / $P(k) \Rightarrow P(k+1) \forall k \geq n_0$

(Si k satisface la pdd $P \Rightarrow k+1$ satisface la pdd. P)

Entonces $P(n) \forall n \in \mathbb{N}$ (n satisface la pdd $P \forall n \in \mathbb{N}$) / $P(n) \forall n \geq n_0$.



Ejercicio 1. Probar de dos formas distintas que

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

para todo natural n .

(A) Paso base: $n=0$ $\sum_{i=0}^0 i = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$ ✓

(B) Paso inductivo: Hipotesis inductiva: $\sum_{i=0}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$, queremos probar
T.I. $\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Demostración de la T.I. a partir de la H.I.:

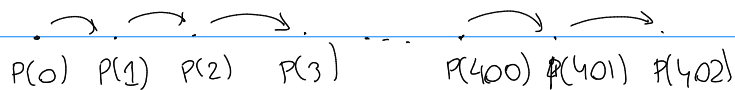
$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{k+1} i &= 0+1 + \dots + k+k+1 \\
 &= \frac{k(k+1)}{2} + k+1 \\
 &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\
 &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
 \end{aligned}$$

Distributiva:

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$\Rightarrow (k+2)(k+1) = k(k+1) + 2 \cdot (k+1)$$

Es decir si $\sum_{i=0}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$, entonces $\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$



Por P.I.C. $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Otra forma de ver esto. (Método de Gauss).

$n=100$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n i &= 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 \\
 \sum_{i=0}^n i &= 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 1 + 0 \\
 \hline
 2 \sum_{i=0}^n i &= \underbrace{100 + 100 + 100 + 100 + \dots + 100 + 100}_{\substack{101 \text{ veces} \\ (n+1) \text{ veces}}} \\
 &= 100 \cdot 101 = n \cdot (n+1) \\
 \sum_{i=0}^n i &= \frac{100 \cdot 101}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 2 práctico 1: Probar que $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Paso base: $n=0$. $\sum_{i=0}^0 i^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0+1)}{6}$ ✓ (Se cumple el caso base)

Paso inductivo:

Hipótesis inductiva: $\sum_{i=0}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad (n=k)$

Tesis inductiva: $\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} \quad (n=k+1)$

Tenemos que probar la tesis inductiva asumiendo la hipótesis inductiva como cierta.

Demostración de $\sum_{i=0}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \Rightarrow \sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} :$

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \underbrace{0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + k^2}_{\text{H.I.}} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)(k+1)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Como probamos el paso base y el paso inductivo, la propiedad $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3. Probar que

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \left(\sum_{i=0}^n i \right)^2$$

para todo natural n .

Por el ejercicio 1 $\left(\sum_{i=0}^n i \right)^2 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2$

$$\left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

\Rightarrow Probaremos que $\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$

Caso base: $n=0$ $\sum_{i=0}^0 i^3 = 0 = \frac{0^2 \cdot (0+1)^2}{4}$ ✓

Paso inductivo: H.I. $\sum_{i=0}^k i^3 = \frac{k^2 (k+1)^2}{4}$ (Suponemos vale)

T.I. $\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}$ (Queremos probarlo)

Demostración de la T.I. a partir de la H.I.:

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \underbrace{0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + k^3}_{\text{H.I.}} + (k+1)^3$$
$$= \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{k^2 \cdot (k+1)^2 + 4(k+1)(k+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 \cdot (k^2 + 4(k+1))}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}$$

$$\begin{aligned} (k+2)^2 &= (k+2)(k+2) \\ &= k^2 + 2k + 2k + 4 \\ &= k^2 + 4k + 4 \\ &= k^2 + 4(k+1) \end{aligned}$$