Parcial:

V o F

1. La cantidad de soluciones de la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r, \quad \text{es } C_r^{n+r-1}$$

con $x_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, ..., n$, para todo $r \in \mathbb{N}$.

$C_r^{n+r-1} = CR_r^n$

$\underbrace{x}_{X_1} | \underbrace{x}_{X_2} | \underbrace{x \quad x}_{X_3} | \dots$

Verdadero.

2. En el desarrollo de $(x + 2y + 1)^8$ el coeficiente de x^6y es 56.

T. Multinomio: el coef de $\boxed{x^6 \cdot (2y) \cdot 1}$ es $\dfrac{8!}{6!\,1!\,1!} = 8 \cdot 7 = 56$

$\Rightarrow$ el coeficiente de $x^6 \cdot y$ es $56 \cdot 2 = 112$.

Falso. $p(x,y) = \dots + 2yx^6 \cdot 56 + \dots$

$= yx^6 \cdot 112 + \dots$

3. La cantidad de desórdenes de 5 elementos distintos es 44.

$\left\lfloor \dfrac{d!}{e} \right\rceil$

A B C D E

N = Total de permutaciones

c_i: fijan pos i

$N = 5!$

$N(c_i) = 4!$

$N(c_i c_j) = 3!$

$N(c_i c_j c_k) = 2!$

$N(c_i c_j c_k c_l) = 1$

$N(c_1 c_2 c_3 c_4 c_5) = 1$

Hagamos I-E

$\text{Total} = \cancel{5!} - \cancel{5 \cdot 4!} + C_2^5 \cdot 3! - C_3^5 \cdot 2! + C_4^5\, 1! - C_5^5$

$= \dfrac{5!}{2!\,\cancel{3!}}\,\cancel{3!} - \dfrac{5!}{3!\,\cancel{2!}}\,\cancel{2!} + \dfrac{5!}{4!\,\cancel{1!}} \cdot \cancel{1!} - \dfrac{5!}{5!}$

$= 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 5 - 1$

$= 5 \cdot 4 \cdot 2 + 4 = 44.$

Verdadero

4. Para todo $m, n \in \mathbb{N}$ se cumple $\mathrm{CR}_n^m = \mathrm{CR}_{m-n}^m$.

Vale $C_n^m = C_{m-n}^m$ pero no para CR.

$m=3 \quad n=2 \qquad CR_2^3 = C_2^4 = \frac{4!}{2!\,2!} = 3 \cdot 2$

$CR_1^3 = C_1^3 = \frac{3!}{1!\,2!} = 3$

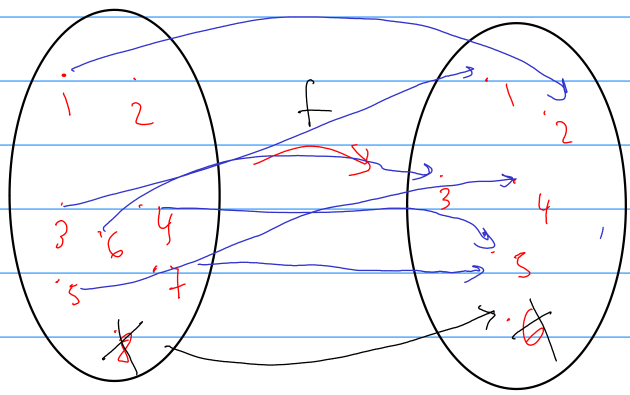
$\boxed{\text{Falso}}$

5. Sob(7, 5) + Sob(7, 6) = Sob(8, 6)/6.

(b) **Funciones Sobreyectivas** $Sob(m+1, n) = n(Sob(m, n-1) + Sob(m, n))$.

$$Sob(m,n) = \sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} Sob(m-i, n-1).$$

$\boxed{\text{Verdadero}}$



Supongamos $f(8)=6$

Si sacamos el 8 tenemos 2 opc $\begin{cases} f: \{1,\dots,7\} \to \{1,\dots,6\} \text{ sobre } \checkmark \\ f: \{1,\dots,7\} \to \{1,\dots,5\} \checkmark \end{cases}$

$Sob(8,6) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. valores} \\ \text{para } f(8)}}{6} \left(\underbrace{Sob(7,6) + Sob(7,5)} \right)$

Múltiple opción.

1. En un ejercicio de un examen se considera analizar la propiedad $2^n \geq n^2$, con $n \in \mathbb{N}$, utilizando Inducción Completa. Se obtuvieron las siguientes respuestas:

Clodomiro: La propiedad es cierta porque vale para $n = 0$ y el paso inductivo:

$$2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2, \text{ vale para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Duvija: Si bien el paso inductivo:

$$2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2, \text{ vale para todo } n \in \mathbb{N},$$

la propiedad vale sólo para $n \geq 4$, pues falla en $n = 3$.

Begoña: ~~El paso inductivo~~:

$$2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2 \text{ vale para todo } n \in \mathbb{N}, n \neq 2$$

y se verifica que la propiedad vale para $n = 4$. Entonces es cierta para todo $n \geq 4$. Además se puede verificar que también vale para $n = 0, 1$ y 2.

Agrippina: La propiedad vale para todo $n \in \mathbb{N}$ porque vale para $n = 0$ y vale el paso inductivo:

$$2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^n + 1 \geq n^2 + 1, \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

La respuesta correcta la escribió:

A) Agrippina X   C) Clodomiro X

B) Begoña   D) Duvija X

Agripina: no vale $\forall n \in \mathbb{N}$: $n=3$ falla

El paso inductivo está mal:
$2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2$

Clodomiro: $2^0 \geq 0^2$
$1 \geq 0$

Si vale el paso inductivo $\forall n \geq 0$

0 → 1 → 2 → 3 → 4

la ppd se cumple a partir de $n=0$
Pero esto no es cierto pues falla en $n=3$.

Duvija: falla por el mismo argumento que arriba

La ppd $2^n \geq n^2$ falla en $n=3$ $(8 < 9)$.

El paso inductivo $2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2$ falla en $n=2$
$(4 \geq 4 ✓)$ $(8 \not\geq 9)$ X

2. La cantidad de palabras de largo 7 con letras de la palabra PALADINES que tienen dos A seguidas o ninguna A es:

A) $4 \cdot 7!$ B) $8!$ C) $2 \cdot 7!$ D) $7!$

AA P L D I N E S
$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

Regla de la suma

no tienen ninguna A

P ~~A~~ L ~~A~~ D I N E S

$7!$ (Permutamos todas las letras que quedan)

tienen dos A seguidas

AA siempre está en la palabra
→ Cuento las palabras de largo 5 con letras P L D I N E S

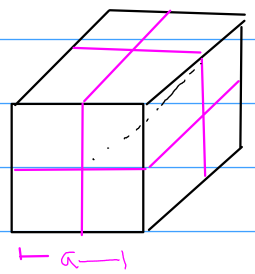
○ 7 ○ 6 ○ 5 ○ 4 ○ 3 ○

Hay $(7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3)\cdot6$ palabras
$= 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot3$
$= 3\cdot7!$

En total hay: $7! + 3\cdot7! = 4\cdot7!$

3. Sea C un cubo de volumen $8\ \text{cm}^3$ y n el mínimo natural tal que podemos asegurar que si seleccionamos n puntos cualesquiera en C, entonces hay dos entre los seleccionados que están a distancia menor o igual a $\sqrt{3}$ (que es la medida de la diagonal de un cubo de volumen $1\ \text{cm}^3$). Entonces:

A) $n = 7$ **B)** $n = 8$ **C)** $n = 9$ **D)** $n = 10$



vol C $= a\cdot a\cdot a = 8 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$\rightsquigarrow$ Partimos C en 8 cubos de tamaño $1\times1\times1$

Si tenemos dos puntos en un mismo cubo, su distancia es $\leq \sqrt{3}$.
Por Palomar, si tenemos 9 ptos $\Rightarrow$ al menos 2 caen en un cubo.

Además, si ponemos uno en cada vértice su distancia es $> \sqrt{3} \Rightarrow$ tiene que ser exactamente 9.

5. Tenemos catorce pelotitas numeradas del 1 al 14, dos de las cuales son de color blanco y doce son de color celeste. Queremos distribuirlas en seis montones, no vacíos y de forma que en cada montón no haya pelotitas de distinto color (se entiende que los montones son recipientes indistinguibles). ¿De cuántas formas se las puede distribuir?

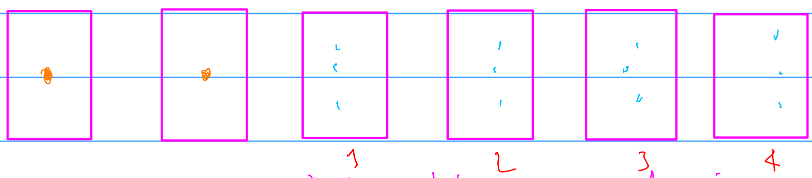
A) $A_1^6 \cdot S(12,5) + A_2^6 \cdot S(12,4)$

B) $C_1^6 \cdot S(12,5) + C_2^6 \cdot S(12,4)$

C) $S(12,5) + S(12,4)$

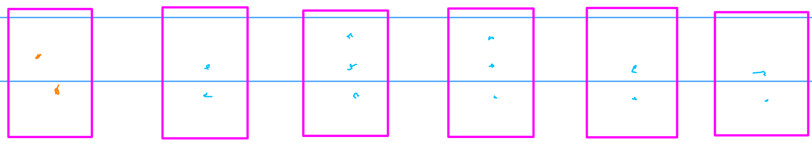
D) $\mathrm{Sob}(12,5) + \mathrm{Sob}(12,4)$

Hay 2 opciones: (2 pelotitas blancas en 2 cajas)



distribuimos 12 pelotitas celestes en 4 cajas no vacías: hay $S(12,4) = \frac{\mathrm{Sob}(12,4)}{4!}$

2 pelotitas blancas en 1 caja.



distribuimos 12 pelotitas celestes en cajas no vacías: hay $S(12,5)$

En total hay: $S(12,4) + S(12,5)$

4. La cantidad de palabras de largo 8 que se pueden formar usando **todas** las letras de la palabra PATOS (se pueden repetir letras) es:

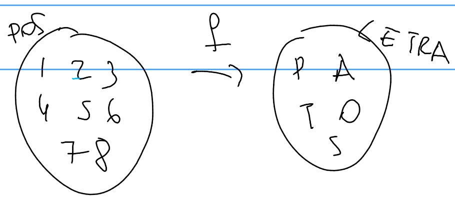
A) A_5^8 **C)** CR_8^5

B) $5^8 - 5 \cdot 4^8$ **D)** $\mathrm{Sob}(8,5)$

P A T O S O O O

P A T
_ _ _ _ _ _ _ _
1 2 3 4 5 6 7 8

$\mathrm{Sob}(8,5)$



$1 \to P$ $3 \to T$

$2 \to A$