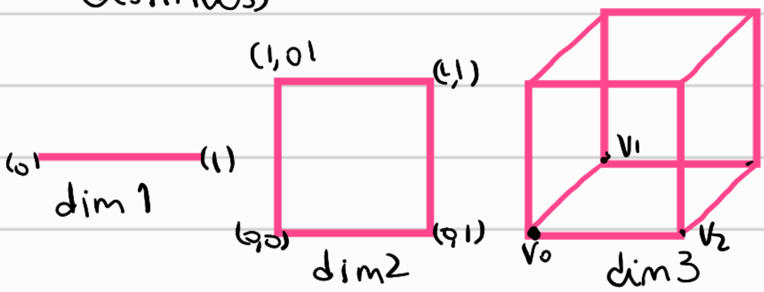
Múltiple Opción 2

El hipercubo H_n de dimensión n es el grafo cuyos vértices son todas las n-uplas de ceros y unos, tales que dos n-uplas son adyacentes si y sólo si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas. Determinar la cantidad de 4-ciclos de H_5.

(A) 60;
(B) 70;
(C) 80;
(D) 90;
(E) 100.

↳ En esta edición del curso contaban los ciclos de distinta forma (nosotros consideramos que (a,b,c,d,a), (a,d,c,b,a), (b,c,d,a,b) son todos distintos)



Para contar los ciclos:

$2^n \cdot$ #{ciclos que comienzan en v_0 fijo}
↳ vértices

Cantidad de ciclos que comienzan y terminan en un v_0 fijo:
Dados dos vértices adyacentes a v_0 existen exactamente dos caminos que comienzan en v_0 y pasan por esos vértices.
$(v_0, v_1, \underline{*}, v_2, v_0)$ y $(v_0, v_2, \underline{*}, v_1, v_0)$.

Ejercicio MO2: Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{12 - 2x - 2x^2}.$$

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, hallar a_8.

A) $a_8 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^8} - \frac{1}{3^8}\right)$

B) $a_8 = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2^8} - \frac{1}{3^8}\right)$

C) $a_8 = \frac{3}{5}(-2^8 + 3^8)$

D) $a_8 = -2^7$

→ con Fracciones simples

Resolución:

$$f(x) = \frac{x}{12 - 2x - 2x^2} = \frac{x}{2(6 - x - x^2)} = \frac{x}{2(2 - x)(3 + x)} = \frac{\alpha}{2 - x} + \frac{\beta}{3 + x}$$

$$= \frac{1}{10}\frac{1}{1 - x/2} + \frac{-1}{10}\frac{1}{1 - (-x/3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10}\frac{x^n}{2^n} + \frac{-1}{10}\frac{x^n}{(-3)^n}$$

$$\Rightarrow a_8 = \frac{1}{10}\frac{1}{2^8} + \frac{-1}{10}\frac{1}{(-3)^8}.$$

$$\frac{x}{2(2-x)(3+x)} = \frac{\alpha}{2-x} + \frac{\beta}{3+x}$$

$$\frac{(3+x)\alpha + (2-x)}{(2-x)(3-x)}$$

De otra forma:

$$f(x) = \frac{x}{12(1-\frac{x}{2})(1+\frac{x}{3})} = \overbrace{\frac{1}{4(1-\frac{x}{2})}}^{g(x)} \overbrace{\frac{x}{3(1+\frac{x}{3})}}^{h(x)}$$

Es el producto de 2 f. generatrices

$$g(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$$

$$h(x) = \frac{x}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-3)^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n \cdot 3^{n+1}} x^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-3)^{n+1}} x^n$$

Entonces $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ donde $a_n = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$

$$a_8 = \frac{1}{4}\underbrace{b_0 a_8}_{=0} - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{7} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{(-3)^{8-i}} = \frac{-1}{3^8 \cdot 4}\sum_{i=0}^{7}\left(\frac{-3}{2}\right)^i$$

↳ sigamos la cuenta...

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{3^8}\left(\frac{1-(-3/2)^8}{\underbrace{1+3/2}_{5/2}}\right) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3^8}\left(1-(-3/2)^8\right)$$

$$(-3/2)^8 = (3/2)^8$$

$$= -\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3^8}\left(1-(3/2)^8\right)$$

$$= -\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3^8} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2^8}$$

$$\boxed{\text{opción B}}$$

Tenemos n pesos uruguayos para comprar manzanas, duraznos y bananas en la feria. Vamos a usar todo el dinero comprando cantidades enteras en kilogramos. Se sabe que las manzanas salen 20 pesos, los duraznos 30 pesos y las bananas 50 pesos por kilogramo. La función generatriz $f(x)$ que representa la cantidad de compras posibles es:

A) $\frac{1}{1+x^{20}}\frac{1}{1+x^{30}}\frac{1}{1+x^{50}}$; B) $\frac{1}{1-x^{20}}\frac{1}{1-x^{30}}\frac{1}{1-x^{50}}$; C) $\frac{1}{1+(x^{20}+x^{30}+x^{50})}$; D) $\frac{1}{1-(x^{20}+x^{30}+x^{50})}$.

Formas de comprar manzanas con \$ 40: una forma (2kg).

$$(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+\dots)(1+x^{30}+x^{60}+x^{90}+\dots)(1+x^{50}+x^{100}+\dots)$$

compras posibles de manzanas — duraznos — bananas

$$\frac{1}{1-x^{20}} \qquad \frac{1}{1-x^{30}} \qquad \frac{1}{1-x^{50}}$$

Si consideramos los subconjuntos $A_i = \{n \in \mathbb{N} : a_i \leq x_i \leq b_i\} \subseteq \mathbb{N}$ entonces la ecuación toma la forma: $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ con restricciones $x_i \in A_i$. Ahora consideremos restricciones mucho más generales, es decir, consideremos subconjunto finitos cualesquiera $A_i \subseteq \mathbb{N}$ y la ecuación en los naturales $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ con restricciones $x_i \in A_i$. Para simplificar supondremos que $m = 3$ y consideremos $x_1+x_2+x_3 = n$ con restricciones $x_1 \in A, x_2 \in B, x_3 \in C$ donde A, B, C son ciertos subconjuntos finitos de los naturales. La siguiente observación es clave: consideramos el producto de polinomios:

$$F(x) = \left(\sum_{a\in A} x^a\right)\left(\sum_{b\in B} x^b\right)\left(\sum_{c\in C} x^c\right)$$

luego de aplicar la propiedad distributiva de polinomios obtenemos una suma donde cada sumando es de la forma $x^a x^b x^c = x^{a+b+c}$ (donde elegimos un x^a de la primer sumatoria, un x^b de la segunda y un x^c de la tercera, de todas las formas posibles). Cada vez que seleccionemos $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$ tales que $a+b+c = n$ obtendremos un sumando x^n. Esto quiere decir que el coeficiente de x^n en el producto $F(x)$ es exactamente el número de soluciones en los naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = n$ con restricciones $x_1 \in A, x_2 \in B, x_3 \in C$. → Bananas

Manzanas Duraznos

La generatriz es $\frac{1}{1-x^{20}}\cdot\frac{1}{1-x^{30}}\cdot\frac{1}{1-x^{50}}$ $\boxed{\text{Opción B}}$

Ejercicio 5.(5 pts.) Se consideran dos sucesiones (a_n) y (b_n) que verifican el sistema de recurrencias:

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n, \\ b_{n+1} = 3a_n + b_n, \end{cases}$$

para todo $n \geq 0$ y las condiciones iniciales $a_0 = \frac{1}{2^{10}}$ y $b_0 = \frac{1}{2^{11}}$. ¿Cuánto vale $a_{15} + b_{15}$?

R. 48. Pues si $c_n := a_n + b_n$ entonces $c_{n+1} = 2c_n$ y $c_{15} = 2^{15}c_0 = 48$.

Si consideramos $c_n = a_n + b_n$ entonces c_n verifica la recurrencia:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= b_n - a_n + 3a_n + b_n \\ &= 2(a_n + b_n) \\ &= 2c_n \end{aligned}$$

La solución grl. de $c_{n+1} = r c_n$ es $c_n = kr^n$ $k = c_0$

En este caso $c_n = c_0 \cdot 2^n$.

$$c_0 = \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{11}}$$

Entonces $c_{15} = \left(\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{11}}\right)2^{15} = 2^5 + 2^4 = 48.$

Múltiple Opción 3

Consideremos la relación binaria R en $A = \{0, 1, \ldots, 10\}$ tal que $(a, b) \in R$ si y sólo si existe un número entero $n \geq 0$ tal que $b = na$. Indicar la opción correcta:

(A) R no es un orden parcial;
(B) R es un orden parcial pero no tiene mínimo;
(C) R es un orden parcial pero no tiene máximo;
(D) R es un orden parcial, tiene mínimo y máximo, y el tamaño máximo de una anticadena es 4;
(E) R es un orden parcial, tiene mínimo y máximo, y el tamaño máximo de una anticadena es 5.

R es un orden parcial: $aRa: \ a = 1 \cdot a \quad 1 \in \mathbb{N}$ ✓ (Refl.)

$aRb \ \ bRc \Rightarrow c = n \cdot b = n \cdot m \cdot a$ ✓(Trans)

$aRb \Rightarrow b = n \cdot a$

$b \neq a \quad \Rightarrow a = \frac{1}{n} b$ pero $\frac{1}{n} \notin \mathbb{N}$

$\rightarrow$ es antisimétrica.

Descartamos A.

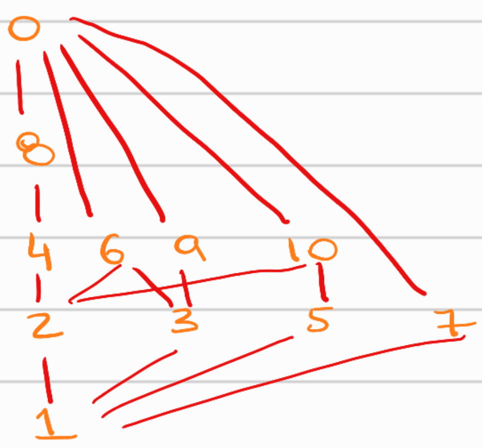
Sea $a \in A \Rightarrow a = a \cdot 1 \Rightarrow 1Ra \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow 1$ es mínimo

Descartamos B

Sea $a \in A \Rightarrow 0 = 0 \cdot a \Rightarrow aR0 \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow 0$ es máximo.

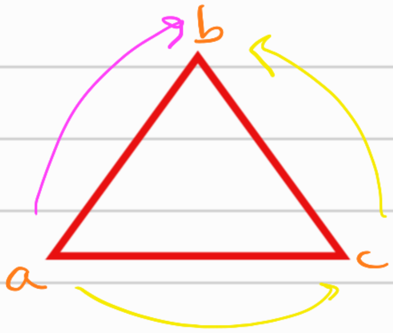


$\{4, 6, 9, 10, 7\}$ es una anticadena de largo 5.

$\boxed{\text{Opción E}}$

EJERCICIO 3 La cantidad de caminos de longitud 99 que existen entre dos vértices adyacentes dados de C_3 es:
Opciones: A) 2^{98}; B) 2×3^{97}; C) $(2^{99} - 1)/3$; D) $(2^{99} + 1)/3$; E) $3 \times (2^{99} + 1)$.

Podemos resolverlo con recurrencia.



Contemos los caminos de a a b de largo n

Hay dos opciones:

La última arista es $\{a, b\}$ $\Rightarrow (a, \ldots, \underset{b \text{ o } c}{\_}, a, b)$ — Hay $2 \cdot \#$cnos. de largo $n-2$ de a a un vértice adyacente $2 \cdot a_{n-2}$

La última arista es $\{c, b\}$ $(a, \ldots, c, b)$ — Hay # cnos de largo $n-1$ de a en c. a_{n-1}.

$\Rightarrow a_n = a_{n+1} + 2a_{n-2} \quad \forall n \geq 2.$

Resolvemos la recurrencia:

Raíces de $x^2 - x - 2$:

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

Solución: $a_n = \alpha \cdot (-1)^n + \beta \cdot 2^n$

$a_1 = 1$ y $a_2 = 1$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} 1 = -\alpha + 2\beta \\ 1 - \alpha + 4\beta \\ \hline \end{array}$$

$$6\beta = 2 \Rightarrow \beta = 1/3 \Rightarrow \alpha = 2/3 - 1 = -1/3$$

Resulta: $a_{99} = \frac{-1}{3}(-1)^{99} + \frac{1}{3} 2^{99}$

$$= \frac{2^{99}+1}{3}$$

$\boxed{\text{Opción D}}$