Consulta Viernes 26/7.

Ejercicio 2.(10 pts.) Para n natural sea a_n la cantidad de formas de pagar n pesos con monedas de \$ 1 y \$ 2. Consideramos la función generatriz $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, entonces $f(x)$ es:

(A) $\frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{1/4}{1-x} + \frac{1/4}{1+x}$; (B) $\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-x}$; (C) $\frac{1}{(1-x)^2} \times \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^3}$;

(D) $\frac{1/2}{1+x} + \frac{(1/2)x}{1+x^2} - \frac{1/2}{1+x^2}$; (E) $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x}$.

La generatriz es

$$f(x) = (1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2}$$ (Ya descartamos (C))

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{\alpha}{(1-x)^2} + \frac{\beta}{(1-x)} + \frac{\gamma}{(1+x)}$$ intuimos que es (A)

$$\Rightarrow 1 = \alpha(1+x) + \beta(1+x)(1-x) + \gamma(1-x)^2$$

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha - 2\gamma = 0 & \text{(coeficiente de } x) \\ -\beta + \gamma = 0 & \text{(coeficiente de } x^2) \end{cases}$$

$\alpha = 1/2 \quad \beta = 1/4 \quad \gamma = 1/4$ satisfacen $(*)$.

$\boxed{\text{Opción (A)}}$

Como en el denominador no aparece $\frac{1}{1+x^2}$ sospechamos que debe ser (A), podemos chequearlo directamente:

$$\frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{1/4}{(1-x)} + \frac{1/4}{(1+x)} = \frac{1/2(1+x) + 1/4(1-x)(1+x) + 1/4(1-x)^2}{(1-x)^2(1+x)}$$

$$= \frac{1/2 + 1/2x + 1/4 - 1/4x^2 + 1/4 - 1/2x + 1/4x^2}{(1-x)(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)(1+x)} \quad \checkmark$$

6. El coeficiente de x^{15} de $\dfrac{(1-x^3)^5}{(1-x^5)^3}$ es:

A) 11 **B)** $\boxed{9}$ **C)** 10 **D)** 15

Solución:
Por un lado tenemos el desarrollo de:

$$\Rightarrow (1-x^3)^5 = \sum_{i=0}^{i=5} C_i^5 \cdot (-1)^i \cdot (x^3)^i = C_0^5 \cdot x^0 - C_1^5 \cdot x^3 + C_2^5 \cdot x^6 - C_3^5 \cdot x^9 + C_4^5 \cdot x^{12} - C_5^5 \cdot x^{15}$$

Por otro lado tenemos el desarrollo de:

$$\rightarrow (1-x^5)^{-3} = \sum_{i=0}^{\infty} CR_i^3 \cdot (x^5)^i = CR_0^3 \cdot x^0 + CR_1^3 \cdot x^5 + CR_2^3 \cdot x^{10} + CR_3^3 \cdot x^{15} + \ldots$$

Recordar que estamos buscando el coeficiente de x^{15} en el desarrollo de la función. Cuando multiplicamos ambos desarrollos obtenemos solo dos términos en x^{15}:

$$(C_0^5 \cdot x^0) \cdot (CR_3^3 \cdot x^{15}) \text{ y } (-C_3^5 \cdot x^{15}) \cdot (CR_0^3 \cdot x^0).$$

Por lo tanto el coeficiente de x^{15} es $10 - 1 = 9$.

(Fórmula Binomio)

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n a^i b^{n-i}$$

$$\Rightarrow (-x^3+1)^5 = \sum_{i=0}^{5} C_i^5 (-x^3)^i = \sum_{i=0}^{5} C_i^5 (-1)^i x^{3i}$$

(Con exponente negativo)

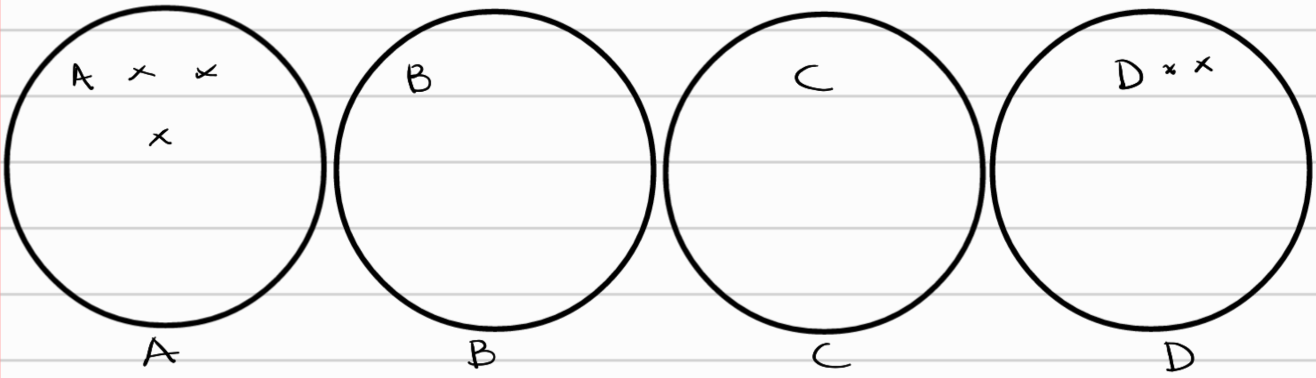
$$(1-y)^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} CR_i^n y^i$$

$(y = x^5)$

$$(1-x^5)^{-3} = \sum_{i=0}^{\infty} CR_i^3 x^{5i}$$

...

EJERCICIO 3 El club de bochas *La ochava* va a elegir un nuevo presidente entre cuatro candidatos: Álvarez, Baldi, Castro y Díaz. En la elección participan los 26 socios del club. Cada candidato es socio y, naturalmente, vota por sí mismo. La esposa y los dos hijos de Álvarez son socios, y votarán por él. Díaz cuenta entre los socios a su madre y su hermana, que votarán por ella. Castro tiene un hijo adolescente que también es socio y no piensa votar por él de ningún modo. Esta elección despierta intensas pasiones, por la que ningún socio vota en blanco. ¿En cuántos de los resultados posibles de esta elección[1] Álvarez y Baldi empatan? Opciones: A) En 238; B) En 123; C) En 96; D) En 63; E) En ninguno.



- El hijo de Castro no lo vota
- No hay votos en blanco.

x_a: #{votos a Álvarez} ídem x_b, x_c, x_d.

$$\Rightarrow \quad x_a + x_b + x_c + x_d = 26$$

$x_a = x_b$

$$\Rightarrow \quad 2x_a + x_c + x_d = 26$$

$4 \leq x_a \qquad 1 \leq x_c \qquad 3 \leq x_d$

Haciendo C.V. $\quad y_a = x_a - 4 \quad y_c = x_c - 1 \quad y_d = x_d - 3$

$$2y_a + 8 + y_c + 1 + y_d + 3 = 26$$

$$\Rightarrow \boxed{2y_a + y_c + y_d = 14}$$

Pero $y_c \leq 13$ (el hijo no lo vota).

Con generatrices:

Queremos el número de soluciones de

$$2y_a + y_c + y_d = 14$$

esto es el coeficiente de x^{14} de

$$\underbrace{(1+x^2+x^4+\dots+x^{14})}_{\sum x^{2y_a}}\underbrace{(1+x+\dots+x^{13})}_{\sum x^{y_c}}\underbrace{(1+x\dots+x^{14})}_{\sum x^{y_d}}$$

Es lo mismo que hallar el coef. de x^{14} de

$$f(x) \quad \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x} = \underbrace{\frac{1}{1-x^2}}_{g(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{(1-x)^2}}_{h(x)}$$

y restarle 1 (corresponde a $y_c=14$, es decir, al hijo de Castro votándolo).

Hallemos el coeficiente:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{donde}$$

$$(c_n) = (a_n) * (b_n)$$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_n b_{n-i}$$

El coef. n-ésimo de $h(x)$ es

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} 1 = n+1$$

El coeficiente n-ésimo de $g(x)$ es

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar.} \end{cases}$$

=> El coeficiente n-ésimo de la convolución es

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}$$

$\boxed{\text{En } n=14}$

$$\Rightarrow c_{14} = 15+0+13+0+11+0+\dots+1$$
$$= 64$$

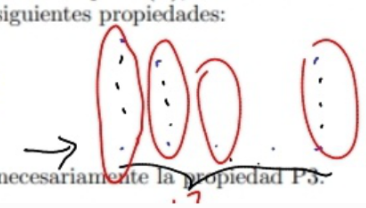
Recordar que había que restarle 1 => la sol. es D

5. Consideremos un conjunto parcialmente ordenado $(P,\le)$ con 121 elementos y que verifica que la mayor caden[a] tiene 10 elementos. La altura de un elemento $x\in P$, denotada por $h(x)$, se define como el mayor cardinal de un[a] cadena $S\subseteq P$ que verifica $\max(S)=x$. Considere las siguientes propiedades:

P1) $h(x)=1$ para todo elemento minimal $x\in P$ ✓

P2) $h(x)=10$ para todo elemento maximal $x\in P$ ✗

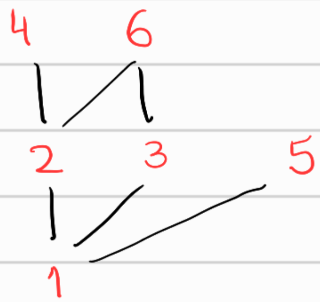
P3) Existe una anticadena con 13 elementos. ✓



A) $(P,\le)$ verifica las propiedades P1 y P2, pero no necesariamente la propiedad P3.

Ejemplo: $P=\{1,2,3,4,5,6\}$

$a\le b$ si $a\mid b$



cadenas con $\max(S)=4$:

4

$2\le 4$

$\boxed{1\le 2\le 4}$ Mas larga $\Rightarrow h(4)=3$

Cadena: cjto $S=\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ tal que podemos poner $x_1\le x_2\le\dots\le x_k$.

$\max(S)=x$: termina en x $\quad x_k=x$

P1

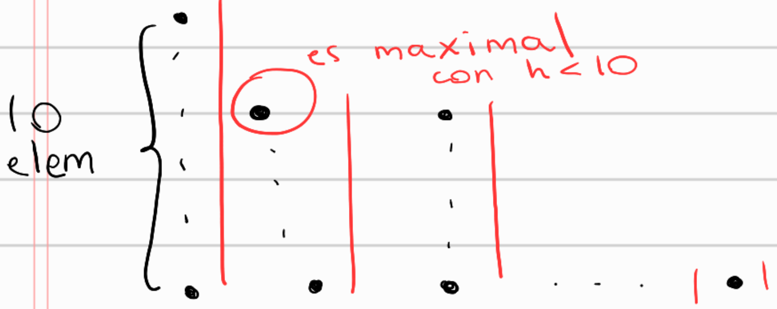
Elemento minimal: $\nexists\, y\in P \,/\, y\le x$

El 1 es minimal.

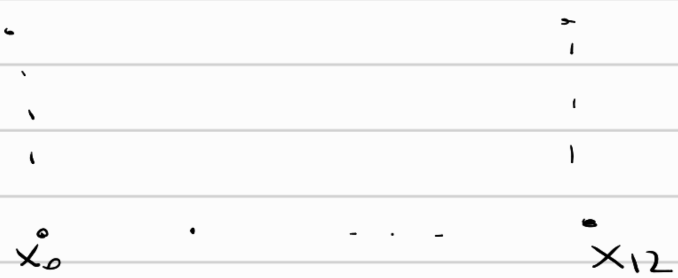
La única cadena que tenemos con max $=1$ es $\{1\}$. $\Rightarrow h(x)=1$.

Vale en gral: $\nexists\, y\in P \,/\, y\le x \Rightarrow$ la única cadena con $\max(S)=x$ es $\{x\}$.

P2 Podríamos tener un diagrama de la forma.



P3 Supongamos que no $\Rightarrow$ en particular no hay más de 12 elementos minimales



$\Rightarrow$ Como cada cadena tiene largo ≤ 10 hay a lo sumo $12 \cdot 10 = 120$ elementos $\lightning$.