

PRÁCTICO 2: MÁXIMO COMÚN DIVISOR, ALGORITMO DE EUCLIDES E IDENTIDAD DE BEZOUT.

**Ejercicio 0.**

- Hallar los divisores positivos de 21 y de 30.
- Hallar los divisores positivos comunes de 21 y 30.
- Usando lo anterior, calcular el máximo común divisor de 21 y 30.

**Ejercicio 1.** [Algoritmo de Euclides]. Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

- Probar que si  $d|a$  y  $d|b$ , entonces  $d|(ax + by)$ , para todo  $x, y \in \mathbb{Z}$ .
- Probar que  $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, a - bq)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .
- Describir el Algoritmo de Euclides para calcular el  $\text{mcd}(a, b)$ .
- Usar el Algoritmo de Euclides para calcular el  $\text{mcd}(a, b)$  en los siguientes casos:

i)  $a = 63, b = 15$ .

ii)  $a = 455, b = 1235$ .

iii)  $a = 2366, b = 273$ .

**Ejercicio 2.** [Lema de Euclides]. Sean  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , tales que  $\text{mcd}(a, b) = 1$  ( $a$  y  $b$  son primos entre sí). Probar o dar un contraejemplo de las siguientes afirmaciones.

- Si  $a|(bc)$  entonces  $a|c$ .
- Si  $a|c$  y  $b|c$  entonces  $ab|c$ .
- ¿Valen las partes anteriores si  $\text{mcd}(a, b) \neq 1$ ?

**Ejercicio 3.** [Bezout] Sean  $a, b, c \in \mathbb{N}$ . Probar las siguientes afirmaciones:

- $\text{mcd}(ca, cb) = c \text{mcd}(a, b)$ . Sugerencia: usar Bezout y probar la doble desigualdad.
- Si  $c|a$  y  $c|b$  entonces:  $\text{mcd}(a/c, b/c) = \text{mcd}(a, b)/c$ .
- Si  $a$  y  $b$  son primos entre sí, entonces:  $\text{mcd}(a - b, a + b) = 1$  o  $2$ . Sugerencia: probar primero que  $\text{mcd}(a - b, a + b)$  divide a  $\text{mcd}(2a, 2b)$ .

**Ejercicio 4.** Para este ejercicio será útil la siguiente propiedad: si  $d|a$  y  $d|b$ , entonces  $d|(ax + by)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ .

- Se define la sucesión de Fibonacci como  $F_0 = 0, F_1 = 1$  y  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ . Demostrar que dos términos consecutivos cualesquiera de la sucesión de Fibonacci son coprimos.
- Demostrar que  $\text{mcd}(7k + 3, 12k + 5) = 1$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .
- Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ , tales que  $(ad - bc)|a$  y  $(ad - bc)|c$ . Probar que:  $\text{mcd}(an + b, cn + d) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ . Sugerencia: hallar una combinación entera de  $an + b$  y  $cn + d$  que valga  $ad - bc$ . Luego adaptarla para que valga 1.

**Ejercicio 5.** [Cofactores.] Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  no nulos.

- a. Probar que  $d = \text{mcd}(a, b)$ , si y sólo si, existen  $a^*, b^* \in \mathbb{Z}$ , coprimos, tales que:  $a = da^*$  y  $b = db^*$ . Los enteros  $a^*$  y  $b^*$  se denominan cofactores de  $a$  y  $b$ . Sugerencia: usar Bezout.
- b. Hallar los cofactores de  $a = 63$  y  $b = 15$ .
- c. Probar que si  $a$  es par y  $b$  impar entonces:  $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a/2, b)$ . Sugerencia: usar cofactores.

**Ejercicio 6.** En cada caso, hallar  $a, b \in \mathbb{N}$  que verifiquen las condiciones dadas.

- a.  $ab = 22275$  y  $\text{mcd}(a, b) = 15$ . Sugerencia: usar cofactores y factorizar en producto de primos.
- b.  $ab = 1008$  y  $\text{mcm}(a, b) = 168$ . Recordar que:  $\text{mcm}(a, b) \cdot \text{mcd}(a, b) = |a||b|$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ .
- c.  $a + b = 1271$  y  $\text{mcm}(a, b) = 330 \cdot \text{mcd}(a, b)$ .
- d.  $a + b = 122$  y  $\text{mcd}(a, b) + \text{mcm}(a, b) = 1802$ .

**Ejercicio 7.** Hallar  $\text{mcd}(a, b)$  sabiendo que  $\text{mcd}(a, b) \cdot \text{mcm}(a, b) = 48$  y  $a^2 = b^2 + 28$ .