ESTRATO 01: INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS MÉTRICOS

Los espacios métricos fueron introducidos en 1906 por Maurice Fréchet, con el objetivo de generalizar la teoría de funciones de una o varias variables. Estos espacios pasaron también a ser parte de la topología luego de que Felix Hausdorff definiera los espacios topológicos (1914). En la actualidad son un tipo muy importante de estructura matemática, presente en áreas de investigación como el análisis funcional y la geometría diferencial.

A grosso modo, un espacio métrico es un conjunto equipado con una función de distancia. Mediante dicha función es posible determinar "a qué distancia" se encuentran entre sí dos puntos cualesquiera del conjunto. Formalmente hablando, tenemos el siguiente concepto.

Definición: Dado un conjunto M, una métrica sobre M es una función $d: M \times M \to \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes condiciones:

(1) (d es definida positiva): $d(x,y) \geq 0$, $\forall x,y \in M$.

(2) (d es no-degenerada): $\forall x \in M$, $x = y$ sii $d(x,y) = 0$.

(3) (simetría): $d(x,y) = d(y,x)$ $\forall x,y \in M$.

(4) (desigualdad triangular): $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $\forall x,y,z \in M$.

- Si d únicamente satisface (1), (3) y (4), diremos que d es una **pseudo-métrica**.
- Si d es una métrica sobre M, al par (M, d) lo llamaremos **espacio métrico**.
- A los elementos de un espacio métrico los llamaremos **puntos**.

En los siguientes ejemplos, veremos que un mismo conjunto puede tener varias estructuras de espacios métricos, es decir, varias métricas definidas sobre él.

<u>Ejemplos</u>:

1) Todo conjunto M puede dotarse de una estructura de espacio métrico. En efecto, sea $d: M \times M \to \mathbb{R}$ dada por

(**métrica discreta**)
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}, \quad \forall x,y \in M.$$

Veamos que d satisface los axiomas de métrica.

- Claramente, $d(x,y) \geq 0 \ \forall x,y \in M$ y además $d(x,y) = 0$ sii $x = y$.
- La simetría también es clara.
- Sean $x, y, z \in M$. Verifiquemos la desigualdad triangular.

  Si $x = z$, entonces $d(x,z) = 0 \leq d(x,y) + d(y,z)$

  Si $x \neq z$, entonces $d(x,z) = 1$. Por otro lado, $y \neq x$ o $y \neq z$ ya que $x \neq z$, por lo cual $d(x,y) + d(y,z) \geq 1$.

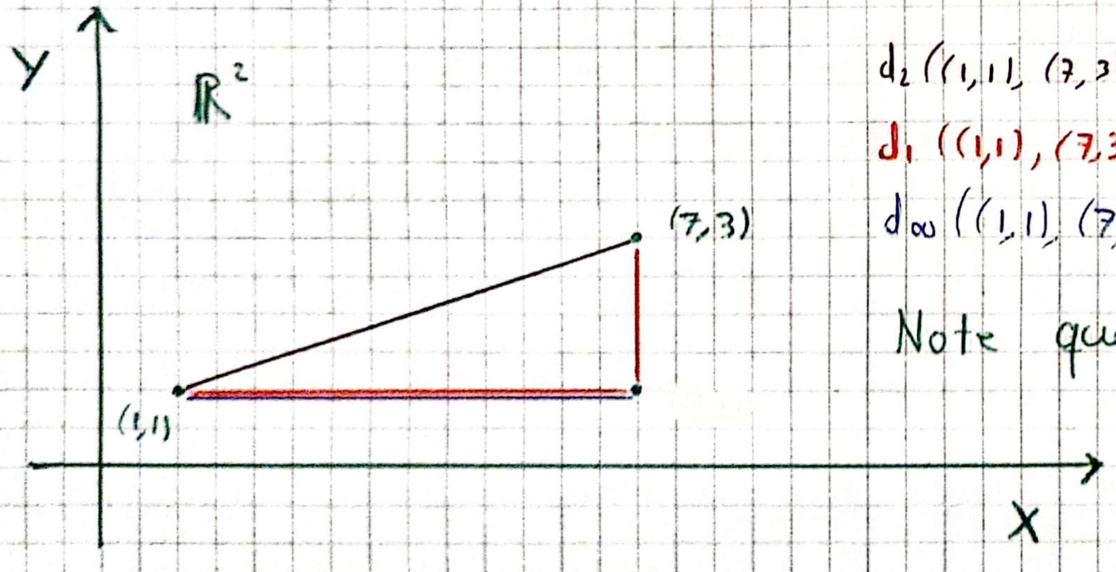
2) **La métrica p**: Sea $p \in \mathbb{R}$ con $p \geq 1$. Se define la métrica p en $\mathbb{R}^n$ como sigue: dados $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$, entonces

$$d_p(\vec{x}, \vec{y}) = [\,|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_n - y_n|^p\,]^{1/p}$$

- El hecho de que d define una métrica sobre $\mathbb{R}^n$ será consecuencia de algo que veremos más adelante (dentro de poco).
- Para $p = 2$, a d_p se le conoce como métrica euclídea o estándar.
- Para $n = 1$, note que $d_p(x, y) = |x - y|$, $\forall p \geq 1$.
- Se puede tomar $p = \infty$ y definir

$$d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}. \quad \text{(métrica cuadrada)}$$

- Veamos cómo funcionan algunas de estas métricas en $\mathbb{R}^2$.



$d_2((1,1), (7,3)) = (6^2 + 2^2)^{1/2} = 2\sqrt{10}$

$d_1((1,1), (7,3)) = |6| + |2| = 8$

$d_\infty((1,1), (7,3)) = \text{máx}\{|6|, |2|\} = 6$

Note que $d_\infty((1,1), (7,3)) \leq d_2((1,1), (7,3))$
$\leq d_1((1,1), (7,3))$

Esto se puede probar de forma más general.

Proposición: $\forall\ \vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$ e $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$ em $\mathbb{R}^m$, se tiene que:

$$d_\infty(\vec{x},\vec{y}) \overset{①}{\leq} d_p(\vec{x},\vec{y}) \overset{②}{\leq} d_1(\vec{x},\vec{y}) \overset{③}{\leq} n\, d_\infty(\vec{x},\vec{y}),$$

para todo $1 \leq p < \infty$.

• Demostración: Probemos cada desigualdad por separado

(Ejercicio)

① $\forall\ i = 1, \dots, n$, veamos que $|x_i - y_i| = \sqrt[p]{|x_i - y_i|^p} \leq \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_m - y_m|^p}$, es decir,

$$|x_i - y_i| \leq d_p(\vec{x},\vec{y}), \quad \forall\ i = 1, \dots, n.$$

Luego, $\max\{|x_i - y_i| \,/\, i = 1, \dots, n\} \leq d_p(\vec{x},\vec{y})$, i.e.,

$$d_\infty(\vec{x},\vec{y}) \leq d_p(\vec{x},\vec{y}).$$

(Probar en clase)

② Basta con ver que $(|x_1|^p + \dots + |x_m|^p)^{1/p} \leq |x_1| + \dots + |x_m|$, ya que para d_p se cumple que $d_p(\vec{x},\vec{y}) = d_p(\vec{x}-\vec{y}, \vec{0})$.

Es obvio que la desigualdad se cumple para $\vec{x} = \vec{0}$. Supongamos entonces $\vec{x} \neq \vec{0}$ y sea $c = (|x_1|^p + \dots + |x_m|^p)^{1/p}$ y $\vec{z} = \dfrac{\vec{x}}{c}$. Luego,

$$d(\vec{z},\vec{0}) = \frac{|x_1|}{c} + \dots + \frac{|x_m|}{c}, \quad \text{donde } \frac{|x_i|}{c} \leq 1 \quad \forall\ i = 1, \dots, n$$

Note que $\dfrac{|x_i|}{c} \leq 1 \underset{p \geq 1}{\Longrightarrow} \dfrac{|x_i|^p}{c^p} \leq \dfrac{|x_i|}{c} \quad \forall\ i = 1, \dots, m$

Entonces, $\left|\frac{x_1}{c}\right|^p + \dots + \left|\frac{x_n}{c}\right|^p \leq \left|\frac{x_1}{c}\right| + \dots + \left|\frac{x_n}{c}\right|$.

Por otro lado, $\left|\frac{x_1}{c}\right|^p + \dots + \left|\frac{x_n}{c}\right|^p = \frac{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}{c^p} = 1$.

Por lo tanto, $1 \leq \frac{|x_1| + \dots + |x_n|}{c}$, es decir,

$$d_p(\vec{x}, \vec{0}) \leq d_1(\vec{x}, \vec{0}).$$

③ $d_1(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$, donde $|x_i - y_i| \leq \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$.

Así, $d_1(\vec{x}, \vec{y}) \leq n\, d_\infty(\vec{x}, \vec{y})$. ■

(Ejercicio)

<u>Observación</u>: Sacando a d_1 de la desigualdad del enunciado anterior, es posible hacer un ajuste y probar que

$$d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) \leq d_p(\vec{x}, \vec{y}) \leq \sqrt[p]{n}\, d_\infty(\vec{x}, \vec{y}). \quad (*)$$

Se sigue usando la idea de la demostración de la parte ③ de la proposición anterior. Notamos entonces a partir de $(*)$ que d_p aproxima a d_∞ si hacemos p muy grande. Es decir, como $\lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{n} = 1$, se tiene que $d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \lim_{p \to \infty} d_p(\vec{x}, \vec{y})$.

Veamos un par de ejemplos más.

Ejemplos:

1) Sea $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ el conjunto de funciones acotadas $f: X \to \mathbb{R}$, donde X es un conjunto cualquiera.

Recuerde que una función $f: X \to \mathbb{R}$ es acotada si existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que
$$|f(x)| \leq c, \quad \forall x \in X.$$

- Así como ocurrió con $\mathbb{R}^n$, podemos dotar a $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ de una métrica $d_\infty : \mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Note que d_∞ está bien definida ya que $f - g$ es acotada.
Hagamos ahora $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ y sea $\mathcal{R}([a,b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}([a,b], \mathbb{R})$ el conjunto de funciones integrables (según Riemann) sobre $[a,b]$.

- Podemos definir $d_p : \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R}) \times \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ como

$$d_p(f, g) = \left[\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \right]^{1/p}.$$

El hecho de que d_p y d_∞ son métricas será consecuencia de un resultado posterior.

Adaptando los argumentos de la proposición anterior a $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, se puede demostrar que

$$d_p(f,g) \leq d_1(f,g) \leq (b-a)\, d_\infty(f,g),$$

$$d_p(f,g) \leq \sqrt[p]{b-a}\; d_\infty(f,g).$$

Sin embargo, en general <u>no</u> es cierto que $d_\infty(f,g) \leq d_p(f,g)$.
Como contraejemplo, sea f la función constantemente igual a 1, y g la función constantemente igual a 0. Luego, para $b = 1/2$ y $a = 0$, se tiene

$$d_\infty(1,0) = \sup_{0 \leq x \leq \frac{1}{2}} |1-0| = 1, \quad d_p(1,0) = \left[\int_0^{1/2} |1-0|^p\, dx\right]^{1/p} = \frac{1}{\sqrt[p]{2}},$$

y $1 > \dfrac{1}{\sqrt[p]{2}}$.

2) <u>**Productos de espacios métricos**</u>: Dado un conjunto finito $(M_1, d_1), \dots, (M_m, d_m)$ de espacios métricos, es posible dar al producto cartesiano

$$M = M_1 \times \cdots \times M_m$$

varias estructuras de espacio métrico, similar a las construcciones de d_p en $\mathbb{R}^m$. Sean $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$ e $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$ en M. Definimos $\rho_p : M \times M \to \mathbb{R}$ y $\rho_\infty : M \times M \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$\rho_p(\vec{x},\vec{y}) = \left[(d_1(x_1,y_1))^p + \cdots + (d_n(x_n,y_n))^p\right]^{1/p}, \quad y$$

$$\rho_\infty(\vec{x},\vec{y}) = \max_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i,y_i)\}.$$

Es claro ver que ρ_p y ρ_∞ son definidas positivas y simétricas.
Supongamos ahora que $\rho_p(\vec{x},\vec{y}) = 0$. Luego,

$$(d_1(x_1,y_1))^p + \cdots + (d_n(x_n,y_n))^p \overset{(*)}{=} 0.$$

Como $d_i(x_i,y_i) \geq 0 \ \forall i=1,\ldots,n$, se tiene que la igualdad $(*)$ implica

$$d_i(x_i,y_i) = 0 \quad \forall i=1,\ldots,n.$$

Así, $x_i = y_i \ \forall i=1,\ldots,n$. Es decir, $\vec{x}=\vec{y}$.
De manera similar, si $\rho_\infty(\vec{x},\vec{y}) = 0$ y como $d_i(x_i,y_i)\geq 0$, se tiene entonces que

$$0 = \max_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i,y_i)\} \geq d_i(x_i,y_i) \geq 0 \Rightarrow d_i(x_i,y_i) = 0 \quad \forall i=1,\ldots,n.$$
$$\Rightarrow x_i = y_i \quad \forall i=1,\ldots,n.$$

Entonces, $\vec{x}=\vec{y}$.

Falta verificar que ρ_p y ρ_∞ cumplen la desigualdad triangular.

Sean $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ y $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)$ en M.

$\rho_\infty(\vec{x}, \vec{z}) = \max\limits_{1 \le i \le n} \{d_i(x_i, z_i)\}$, donde $d_i(x_i, z_i) \le d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$

$$\le \max_{1 \le i \le n} \{d_i(x_i, y_i)\} + \max_{1 \le i \le n} \{d_i(y_i, z_i)\}$$

Luego $d_i(x_i, z_i) \le \rho_\infty(\vec{x}, \vec{y}) + \rho_\infty(\vec{y}, \vec{z}) \quad \forall i = 1, \dots, n$, por lo cual

$$\underbrace{\max_{1 \le i \le n} \{d_i(x_i, z_i)\}}_{= \rho_\infty(\vec{x}, \vec{z})} \le \rho_\infty(\vec{x}, \vec{y}) + \rho_\infty(\vec{y}, \vec{z})$$

Por otro lado, $\rho_p(\vec{x}, \vec{z}) = \left[(d_1(x_1, z_1))^p + \dots + (d_n(x_n, z_n))^p \right]^{1/p}$

$$= \| (d_1(x_1, z_1), \dots, (d_n(x_n, z_n)) \|_p$$ (norma p, se define más adelante)

$\forall i = 1, \dots, n$ tenemos que $d_i(x_i, z_i) \le d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)$

$$(d_i(x_i, z_i))^p \le [d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)]^p$$

Así, usando la notación de norma p, tenemos

$$\| (d_1(x_1, z_1), \dots, d_n(x_n, z_n)) \|_p \le \left[(d_1(x_1, y_1) + d_1(y_1, z_1))^p + \dots + (d_n(x_n, y_n) + d_n(y_n, z_n))^p \right]^{1/p}$$

$$= \| (d_1(x_1, y_1) + d_1(y_1, z_1), \dots, (d_n(x_n, y_n) + d_n(y_n, z_n)) \|_p$$

$$= \| (d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)) + (d_1(y_1, z_1), \dots, d_n(y_n, z_n)) \|_p$$

Por la desigualdad de Minkowski (se demostrará más adelante) tenemos que:

$$\|(d_1(x_1,y_1),\dots,d_n(x_n,y_n))+(d_1(y_1,z_1),\dots,d_n(y_n,z_n))\|_p$$

$$\leq \|(d_1(x_1,y_1),\dots,d_n(x_n,y_n))\|_p+\|(d_1(y_1,z_1),\dots,d_n(y_n,z_n))\|_p$$

$$=\rho_p(\vec{x},\vec{y})+\rho_p(\vec{y},\vec{z}).$$

Por lo tanto, $\rho_p(\vec{x},\vec{z})\leq\rho_p(\vec{x},\vec{y})+\rho_p(\vec{y},\vec{z})$.

Espacios normados

A partir de los ejemplos anteriores, podemos notar una relación entre la teoría de espacios normados con la de espacios métricos. De hecho, los espacios normados constituyen una de las familias más importantes de espacios métricos.

Definición: Sea $(V,\mathbb{R},+,\cdot)$ un espacio vectorial real. Una norma sobre V es una función $\|\ \|:V\to\mathbb{R}$ que cumple con lo siguiente:

(1) ($\|\ \|$ es definida positiva): $\|v\|\geq 0$ $\forall v\in V$.

(2) ($\|\ \|$ es no-degenerada): $\|v\|=0$ sii $v=0$.

(3) (Homogeneidad): $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall v \in V$.

(4) (Desigualdad triangular): $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$.

Al par $(V, \| \|)$ lo llamaremos espacio normado.

<u>Proposición</u>: Todo espacio normado $(V, \| \|)$ es un espacio métrico, con la métrica inducida por $\| \|$,

$$d_{\| \|} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por $d_{\| \|}(v, w) := \|v - w\|$.

· <u>Demostración</u>: Verificamos que $d_{\| \|}$ satisface los cuatro axiomas de métrica

(1) $d_{\| \|}(v, w) = \|v - w\| \geq 0$ porque la norma es definida positiva.

(2) Sean $v, w \in V$.

$$v = w \text{ sii } v - w = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ya que } \| \| \text{ es} \\ \text{no-degenerada}}}{\text{sii}} \|v - w\| = 0 \text{ sii } d_{\| \|}(v, w) = 0.$$

(3) $d_{\| \|}(v, w) = \|v - w\| = \|-(w - v)\| = \|(-1)(w - v)\| \overset{\substack{\text{homogeneidad} \\ \uparrow}}{=} |-1| \cdot \|w - v\|$

$= 1 \cdot \|w - v\| = d_{\| \|}(w, v)$.

(4) Sean $u, v, w \in V$. $d_{\| \|}(u, w) = \|u - w\| = \|(u - v) + (v - w)\|$

desigualdad triangular $\rightarrow \leq \|u - v\| + \|v - w\|$

Así, $d_{\|\|}(u,w) \leq d_{\|\|}(u,v) + d_{\|\|}(v,w)$.

$\therefore$ $d_{\|\|}$ es una métrica. $\square$

<u>Observación</u>: 1) $\|v\| = d_{\|\|}(v,0)$, podemos así pensar en la norma de un vector como en la distancia que guarda con el origen o cero del espacio vectorial.

2) De la proposición y observación anterior, vale hacerse la pregunta de si todo espacio vectorial con una métrica d posee estructura de espacio normado, con norma $\|\ \|$ compatible con la métrica de origen, en el sentido de $d = d_{\|\|}$. De existir tal norma inducida $\|\ \|$ a partir de d, debe cumplirse que

$$\|v\| = d(v,0) \quad \forall v \in V$$

Consideremos en particular la métrica $d(v,w) = \begin{cases} 0 & \text{si } v=w \\ 1 & \text{si } v \neq w \end{cases}$

Para $\lambda \neq 0, \pm 1$, tenemos

$$|\lambda|\,\|v\| = \|\lambda v\| = d(\lambda v, 0) = 1 \quad (v \neq 0)$$

$$\| \qquad\qquad$$

$|\lambda|\, d(v,0)$ Así, $|\lambda| = 1$, lo cual es una contradicción.

$$\|$$

$|\lambda| \cdot 1$

Ejemplos:

1) Sea $p \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Se define sobre $\mathbb{R}^n$ la norma p como sigue:

$\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\quad \|\vec{x}\|_p := \left[|x_1|^p + \dots + |x_n|^p \right]^{1/p} \quad (p \neq \infty)$

Por argumentos usados anteriormente, sabemos que $\vec{x} = \vec{0}$ sii $\|\vec{x}\|_p = 0$.

Por otro lado, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, tenemos que

$$\|\lambda \vec{x}\|_p = \left[|\lambda x_1|^p + \dots + |\lambda x_n|^p \right]^{1/p} = \left[|\lambda|^p \left(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p \right) \right]^{1/p}$$

$$= \left(|\lambda|^p \right)^{1/p} \left(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \|\vec{x}\|_p$$

La desigualdad triangular,

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_p \leq \|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p,$$

conocida en este caso como desigualdad de Minkowski, no es fácil de demostrar y merece un tratamiento aparte.

Note que $d_p = d_{\|\ \|_p}$.

Para $p = \infty$, $\|\vec{x}\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$. En este caso, los axiomas de norma se pueden probar fácilmente a partir de argumentos vistos con anterioridad. Note que $d_\infty = d_{\|\ \|_\infty}$.

2) $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ es un espacio normado con $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}\{|f(x)|\}$.

Para $X=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, tenemos además la norma p, con $p\in[1,+\infty)$, sobre $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})\subseteq\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$, dada por

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}, \quad \forall f\in\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R}).$$

- Claramente $\|f\|_p \geq 0$ y $f=0 \Longrightarrow \|f\|_p = 0$.
- Si $\|f\|_p = 0$, entonces $\int_a^b |f(x)|^p\,dx = 0$.

Como $|f(x)|^p \geq 0\ \forall x\in[a,b]$, por propiedades de la integral de Riemann tenemos que $f(x)=0\ \forall x\in[a,b]$.

- Dado $\lambda\in\mathbb{R}$, tenemos $\|\lambda f\|_p = \left[\int_a^b |\lambda f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} = \left[|\lambda|^p\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}$

$$= |\lambda|\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} = |\lambda|\,\|f\|_p.$$

- La desigualdad triangular, o de Minkowski, se demostrará aparte.

Desigualdades de Hölder: Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ Entonces:

(1) $\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q} = \|\vec{x}\|_p \|\vec{y}\|_q$$

(Para $p = q = 2$, se obtiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz)

(2) $\forall f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, $\displaystyle\int_a^b |f(x) g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$.

· **Demostración**:

(1) Es útil recordar, o conocer, la desigualdad de Young:

$$\boxed{\text{Si } a, b \geq 0 \text{ y } p, q > 1 \text{ tales que } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ entonces } ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.}$$

Luego, $\dfrac{|x_i|}{\|\vec{x}\|_p} \dfrac{|y_i|}{\|\vec{y}\|_q} \leq \dfrac{|x_i|^p}{p\|\vec{x}\|_p^p} + \dfrac{|y_i|^q}{q\|\vec{y}\|_q^q}$ $\forall i = 1, \dots, n$

(si $\vec{x} \neq \vec{0}$ e $\vec{y} \neq \vec{0}$, ya que el caso $\vec{x} = \vec{0}$ o $\vec{y} = \vec{0}$ es inmediato)

Sumando, obtenemos $\sum_{i=1}^{m} \frac{|x_i|}{\|\vec{x}\|_p} \cdot \frac{|y_i|}{\|\vec{y}\|_q} \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{|x_i|^p}{p\|\vec{x}\|_p^p} + \sum_{i=1}^{m} \frac{|y_i|^q}{q\|\vec{y}\|_q^q}$

$$= \frac{1}{p} \frac{1}{\|\vec{x}\|_p^p}\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right) + \frac{1}{q} \frac{1}{\|\vec{y}\|_q^q}\left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^q\right)$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\|\vec{x}\|_p^p} \cdot \|\vec{x}\|_p^p + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\|\vec{y}\|_q^q} \cdot \|\vec{y}\|_q^q$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Es decir, $\frac{1}{\|\vec{x}\|_p} \cdot \frac{1}{\|\vec{y}\|_q} \sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leq 1$

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leq \|\vec{x}\|_p \cdot \|\vec{y}\|_q.$$

(2) Es análoga a la parte (1). ∎

<u>Observación</u>: Se puede hacer $p = \infty$ y $q = 1$ en las desigualdades de Hölder:

(1) $\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leq \|\vec{x}\|_\infty \cdot \|\vec{y}\|_1$, (2) $\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1$.

· **Demostración**: Solamente demostraremos (2) ((1) es análoga).

$$|f(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} \{|f(x)|\} = \|f\|_\infty \Longrightarrow |f(x)\,g(x)| \leq \|f\|_\infty |g(x)|, \ \forall x \in [a,b].$$

$$\Longrightarrow \int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty |g(x)|\,dx$$

$$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty \int_a^b |g(x)|\,dx = \|f\|_\infty \|g\|$$

Desigualdades de Minkowski: Sea $p \geq 1$.

(1) $\|\vec{x}+\vec{y}\|_p \leq \|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

(2) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, $\forall f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$.

· **Demostración**: Solamente probaremos la parte (2).

$$\|f+g\|_p^p = \int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx = \int_a^b |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx$$

$$\leq \int_a^b |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_a^b |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx$$

Ahora, $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b \left(|f(x)+g(x)|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{1/\frac{p}{p-1}}$

ya que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\frac{p}{p-1}} = 1$

$$\int_a^b |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \leq \|f\|_p \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f\|_p\,\|f+g\|_p^{p-1}$$

Análogamente, $\displaystyle\int_a^b |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \leq \|g\|_p\,\|f+g\|_p^{p-1}$.

Entonces, $\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p\,\|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p\,\|f+g\|_p^{p-1}$

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\,\|f+g\|_p^{p-1}$$

Si $\|f+g\|_p \neq 0$, nos queda $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ al dividir por $\|f+g\|_p^{p-1}$. En el caso $\|f+g\|_p = 0$, la desigualdad de Minkowski es trivial. ∎

Desigualdad de Young $\Rightarrow$ Desigualdad de Hölder $\Rightarrow$ Desigualdad de Minkowski

Espacios con producto interno

Así como el concepto de norma representa una abstracción de la noción de distancia para espacios vectoriales, existe una operación binaria sobre espacios vectoriales que representa una generalización simultánea de las nociones de distancia y ángulo, a saber, el producto interno.

Definición: Sea V un espacio vectorial. Un producto interno sobre V es una función $\langle\ ,\ \rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ que cumple con lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{ll}(1)\ \langle v+v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle,\ \forall v, v', w \in V. & \text{(aditividad)}\\ (2)\ \langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle,\ \forall \lambda\in\mathbb{R} \text{ y } \forall v, w\in V. & \text{(homogeneidad)}\end{array}\right\} \begin{array}{c}\langle \lambda v+v', w\rangle\\ \shortparallel \\ \lambda\langle v,w\rangle + \langle v', w\rangle.\end{array}$$

(3) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle,\ \forall v, w\in V.$ (simetría)

(4) $\langle v, v\rangle \geq 0$, y (definido positivo).

$v = 0$ sii $\langle v, v\rangle = 0.$

Ejemplos:

(1) $\langle\ ,\ \rangle_2 : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

(2) $\langle\ ,\ \rangle_2 : \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})\times\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ $\forall f, g \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$.

Es fácil verificar que tanto (1) como (2) son productos internos.

Los espacios vectoriales con producto interno son casos particulares de espacios normados, y por ende de espacios métricos

Proposición: Todo espacio vectorial V con producto interno $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ es un espacio normado, con la norma inducida $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|v\| := (\langle v, v \rangle)^{1/2}.$$

• **Demostración:** Veamos que $\|\ \|$ verifica los axiomas de norma.

- $\|v\| \geq 0 \ \forall v \in V$, es claro de la definición de $\|\ \|$.
  Note que $\|v\|$ está bien definido ya que $\langle v, v\rangle \geq 0$.
  Supongamos ahora que $\|v\| = 0$. Luego, $\langle v, v \rangle = 0$. Por la definición de producto interno, queda que $v = 0$.
- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in V$ $\quad \|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{homogeneidad} \\ \text{y simetría}}}{=} \lambda^2 \langle v, v \rangle = \lambda^2 \|v\|^2.$

  Así, $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

- $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aditividad y} \\ \text{simetría}}}{=} \langle v, v \rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w \rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2$

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{desigualdad de} \\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$$

(GAL 2)

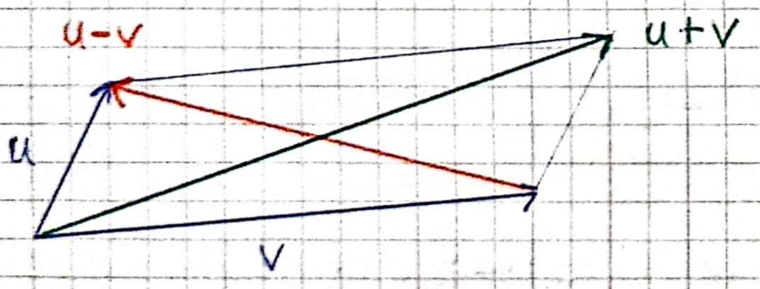
Así, $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$. $\blacksquare$

El recíproco de la proposición anterior no es cierto en general, es decir, existen normas que no están inducidas por un producto interno. Esto viene caracterizado por el siguiente resultado (GAL 2).

<u>Teorema de Jordan - von Neumann:</u> Sea V un espacio vectorial normado, con norma $\|\ \|: V \to \mathbb{R}$. Entonces, $\|\ \|$ está inducida por un producto interno si y solamente si $\|\ \|$ satisface la identidad del paralelogramo:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right), \quad \forall u,v \in V.$$

En tal caso, el producto interno $\langle\ ,\ \rangle: V\times V \to \mathbb{R}$ viene dado por: $\langle u,v\rangle := \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$, $\forall u,v \in V$.

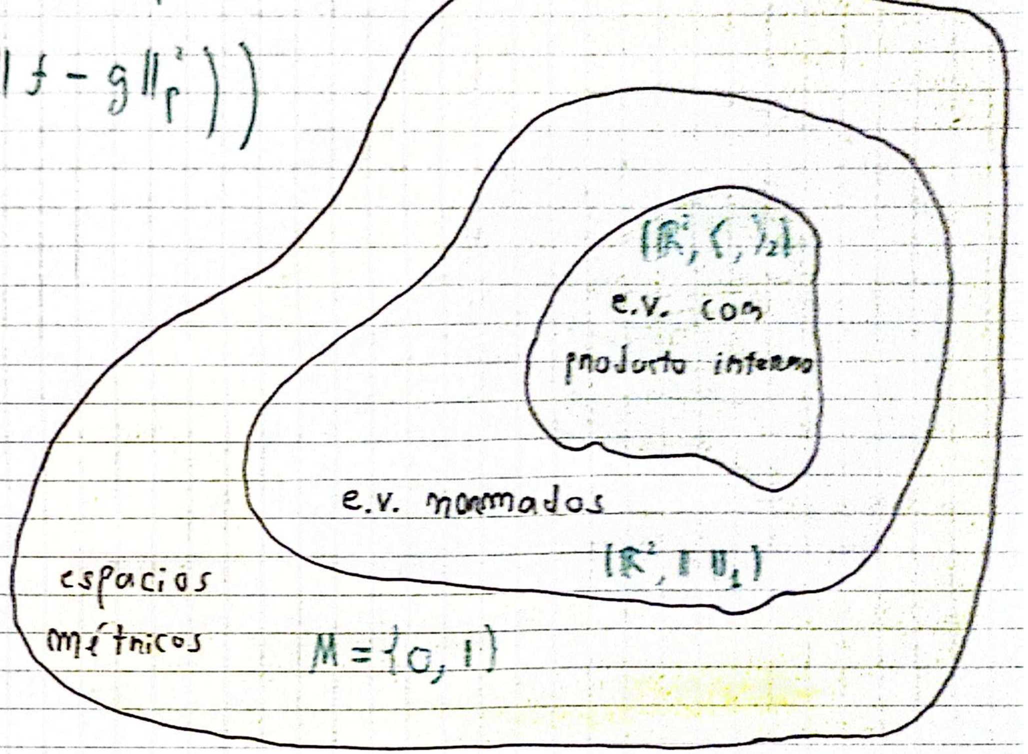


Ejemplo: Sobre $\mathbb{R}^n$ o $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$, $\| \ \|_p$ está inducida por un producto interno si y solamente si $p=2$. Esto se debe a que la operación

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|_p^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|_p^2 \right)$$

$$\left(\text{o} \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{4}\left(\|f+g\|_p^2 - \|f-g\|_p^2 \right) \right)$$

no es aditiva para $p \neq 2$.

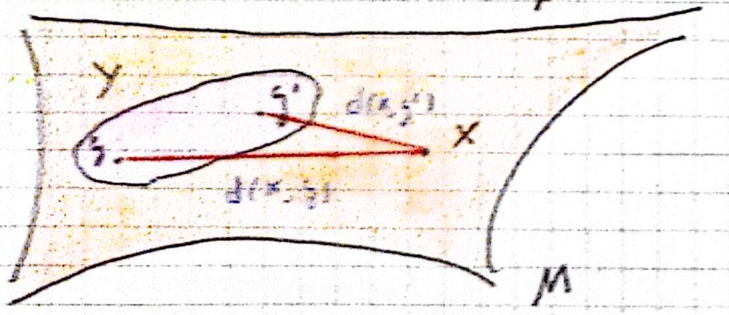


Distancia de un punto a un conjunto

Distancia entre conjuntos

Dado un espacio métrico (M, d), podemos aprovechar d para calcular distancias entre puntos y subconjuntos, o entre subconjuntos de M.

Dado $x \in M$ e $Y \subseteq M$, $Y \neq \emptyset$, para cada $y \in Y$ tenemos $d(x,y) \geq 0$.



Así, $\{d(x,y) / y \in Y\}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y acotado inferiormente, por lo cual posee ínfimo.

Definición: $d(x,Y) := \inf\{d(x,y) / y \in Y\}$.