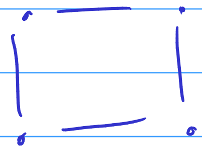
$G = (V, E)$

$G_1 = (V_1, E_1)$ es subgrafo recubridor de G si $\underline{V_1 = V}$, $\underline{E_1 \subseteq E}$



$\#$ de subgrafos rec $= \#$ subconjuntos de E

$= 2^{\# E}$

Ejercicio 4.(10 pts.) Consideremos las funciones generatrices $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Se sabe que $a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ para todo $n \geq 0$ y que $a_0 = 1$. Indique la opción correcta:

(A) La función generatriz $f(x)$ es invertible y su inversa es $g(x)$;
(B) La función generatriz $f(x)$ es invertible y su inversa es $xg(x)$;
(C) La función generatriz $f(x)$ es invertible y su inversa es $1 - xg(x)$;
(D) La función generatriz $f(x)$ es invertible y su inversa es $1 + xg(x)$;
(E) La función generatriz $f(x)$ no es invertible.
(Nota: la invertibilidad es con respecto a la operación producto.)

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\boxed{c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_{n+1}}$$

$$a_1 = \sum_{i=0}^{0} a_i b_{-i} = a_0 b_0 = b_0$$

$$a_2 = \sum_{i=0}^{1} a_i b_{1-i} = a_0 b_1 + a_1 b_0 = b_1 + b_0^2$$

$$f(x)\cdot g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

$$= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots$$

$$x f(x)\cdot g(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$x f(x) g(x) + a_0 = a_0 + a_1 x + \cdots = f(x)$$

$$f(x) = \underbrace{x f(x)\cdot g(x)} + 1$$

$$f(x) - f(x)\cdot x g(x) = 1$$

$f(x)(1 - x g(x)) = 1$ y la inversa de $f(x)$ es $1 - x g(x)$.

Ejercicio 4.(5 pts.) Sean (a_n) y (b_n) las sucesiones asociadas a las funciones generatrices $A(x) = \frac{1+2x}{(1-x)^2}$ y $B(x) = \frac{1}{(1+2x)(1-x)}$. Sea (c_n) la convolución de ambas sucesiones. ¿Cuánto vale c_{10}?

Primero hacemos fracc simple

para $B(x) = \boxed{\frac{1}{(1+2x)(1-x)} = \frac{\alpha}{1+2x} + \frac{\beta}{1-x}}$

si multiplicamos la igualdad por $1-x$ y evaluamos en $x=1$ obtenemos β

$\boxed{\beta = \frac{1}{3}}$ $\qquad \alpha = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

$$A(x) = \frac{1+2x}{(1-x)^2} \quad ,$$

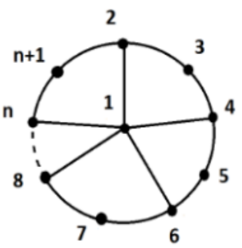
$$B(x) = \frac{1}{(1+2x)(1-x)}$$

$$A(x)\cdot B(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} CR(3,n)x^n$$

el coef x^{10} es $CR(3,10)$

$$= C(12,10) = \frac{12\cdot 11}{2} = 66.$$

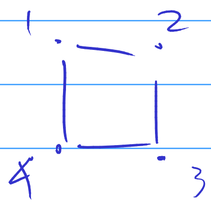
5. En el siguiente grafo de $n+1$ vértices (asumir n par), el vértice 1 está unido por una arista con cada vértice par.



subgrafos isomorfos a C_n para algún n.

Halle la cantidad de ciclos (tamaño ≥ 3) en el grafo.

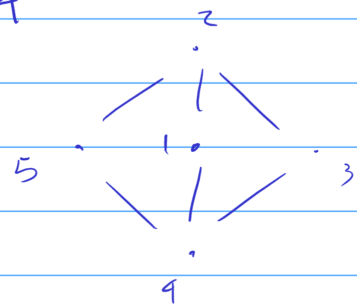
(A) $\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)+1$ (B) $\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-2)+1$
(C) $n(\frac{n}{2}-1)+1$ (D) $n(\frac{n}{2}-2)+1$
(E) $n(\frac{n}{2})+1$



8 ciclos (2024)
1 ciclo (20??)

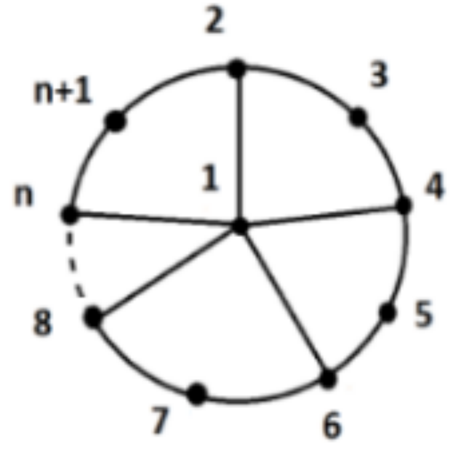
1234	1432
2341	2143
3412	3214
4123	4321

$n=4$

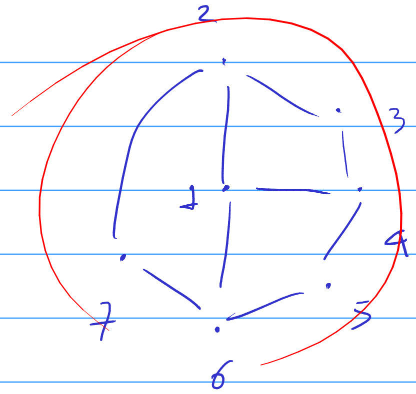


$\boxed{3}$

$2\cdot 1+1$

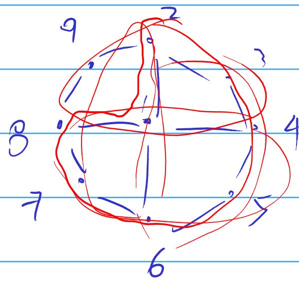


$n=6$



7
$=3+3+1$
$=2\cdot 3+1$

$n=8$



1 que es el "perimetro"

por cada pedazo 1

4

por cada 2 pedazos

4

por cada 3 pedazos

4

$\frac{n}{2}-1$ $\quad n/2$

$3\cdot 4+1$

En general es $\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)+1$

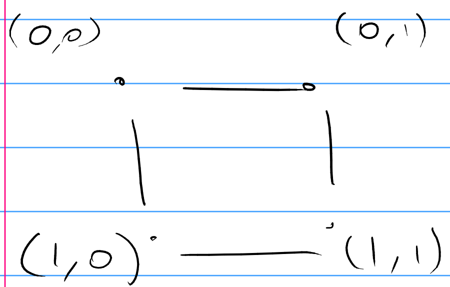
Múltiple Opción 2

El hipercubo H_n de dimensión n es el grafo cuyos vértices son todas las n-uplas de ceros y unos, tales que dos n-uplas son adyacentes si y sólo si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas. Determinar la cantidad de 4-ciclos de H_5.

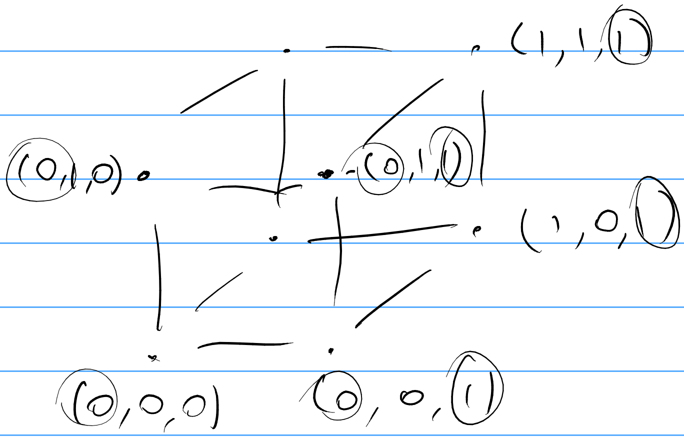
(A) 60;
(B) 70;
(C) 80;
(D) 90;
(E) 100.

$H_2 = (V_2, E_2)$

$V_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$



$H_3 = (V_3, E_3)$ $\quad V_3 = \{(0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1), (0,1,1)\}$



Un subgrafo isomorfo a C_4 en H_5 es

$(e_1, e_2, 0, 0, e_5)$ $e_1, e_2, e_5 \in \{0,1\}$

$(e_1, e_2, 0, 1, e_5)$

$(e_1, e_2, 1, 1, e_5)$

$(e_1, e_2, 1, 0, e_5)$

Primero elegimos 2 coordenadas de los 5 posibles

tengo C^5_2 maneras de hacer eso

y luego elegir con que rellenar los otros 3 coordenadas

tengo 2^3 maneras de hacer eso

$$\text{total} = 2^3 \cdot C^5_2 = 8 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 16 \cdot 5 = \boxed{80}$$

Múltiple Opción 4

Sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión tal que $F_0 = F_1 = 1$, y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Contar la cantidad c_{100} de palabras binarias de largo 100 que no tienen una racha de la forma 011.
Opciones: A) $c_{100} = F_{100}+1$; B) $c_{100} = F_{100}-1$; C) $c_{100} = F_{100}+F_{101}$; D) $c_{100} = F_{100}+F_{101}-1$.

Palabras binarias

→ largo 1: 0, 1

→ largo 2: 00, 01, 10, 11

→ largo 3: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110

111.

Hay 2^n palabras de largo n.

C_n = # palabras binarias de largo n que no contienen 011.

$C_1 = 2$, $C_2 = 4$, $C_3 = 7$, $C_4 = 12$

$\boxed{C_n = F_{n+2} - 1}$

0000, 0001, 0010, 0011,
0100, 0101, 0110, 0111,
1000, 1001, 1010, 1011,
1100, 1101, 1110, 1111

$C_3 = C_1 + C_2 + 1$

$C_4 = C_2 + C_3 + 1$

EJERCICIO 2 Sea $A = \{n \in \mathbb{Z} : 3 \leq n \leq 96$ y n es múltiplo de $3\}$. Tenemos en A la relación de orden parcial definida por $n\mathcal{R}m$ si n divide a m. Entonces: **Opciones:**

~~A)~~ No hay máximo, la cadena más larga tiene largo 5, la anticadena más larga tiene largo 11.

B) No hay máximo, la cadena más larga tiene largo 6, la anticadena más larga tiene largo 14.

C) No hay máximo, la cadena más larga tiene largo 6, la anticadena más larga tiene largo mayor a 14.

~~D)~~ Hay máximo, la cadena más larga tiene largo 6, la anticadena más larga tiene largo 11.

E) Ninguna de las anteriores.

$A = \{3, 6, 9, 12, \ldots, 96\}$

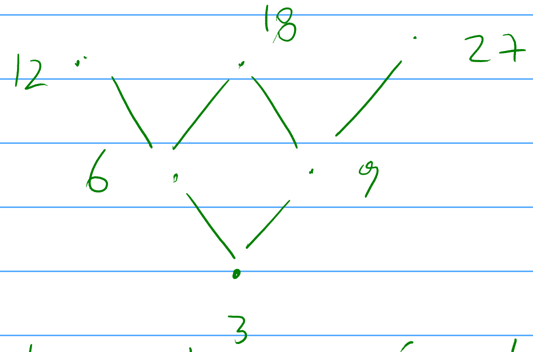
$\#A = 32 = 2^5$

$96 = 32 \cdot 3$

$3 \mathcal{R} 6$

$6 \mathcal{R} 12$, $6 \mathcal{R} 18$

No hay máximo



la cadena más larga

$3 \, R \, 3\cdot 2 \, R \, 3\cdot 2^2 \, R \, 3\cdot 2^3 \, R \, 3\cdot 2^4 \, R \, 3\cdot 2^5 = 96$

tiene largo 6

$\{6, 9\}$ es una anticadena

$\{96, 93, 90, \ldots, 51\}$ la anticadena más grande

$\# \{17\cdot 3, 18\cdot 3, \ldots, 32\cdot 3\} = 16$

$\# \{1, 2, 3\} = (3-1)+1 \qquad 3 - 1 = 2$

Ejercicio 11. (Examen Diciembre 2009)
Resolver el siguiente sistema de relaciones de recurrencia:

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} - b_n \\ b_{n+1} = b_n - 3a_{n-1} \\ a_0 = 0,\ b_0 = 2, b_1 = 1 \end{cases}$$

$a_n,\ n \geq 0$

$b_n,\ n \geq 0$

$a_{n+1} = -a_n - b_{n+1},\ n \geq 0$

$b_{n+2} = b_{n+1} - 3a_n,\ n \geq 0$

$b_{n+1} = -a_n - a_{n+1}$

$b_{n+2} = -a_{n+1} - a_{n+2}$

$\cancel{-a_{n+1}} - a_{n+2} = -a_n - \cancel{a_{n+1}} - 3a_n$

$\boxed{a_{n+2} = 4a_n}$

$a_2 = 4a_0,\ a_4 = 4 \cdot 4 \cdot a_0$

$a_{2+1} = 4a_1,\ a_{4+1} = 4 \cdot 4\ a_1$

$a_{2n} = 4^n \cdot a_0 = 0$

$a_{2n+1} = 4^n \cdot a_1 = -4^n$

MO3: La cantidad de árboles no isomorfos con siete vértices y grado máximo tres es:

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9.