$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n + 5^n \quad , \quad a_0 = 7$$

1. Hom: $a_n^{(h)} = \alpha \cdot 2^n$

2. particular de 2^n

	$a_n^{(p)}$
c, a constant	A, a constant
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$n^t, t \in \mathbf{Z}^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0$
$r^n, r \in \mathbf{R}$	Ar^n
$\sin \alpha n$	$A \sin \alpha n + B \cos \alpha n$
$\cos \alpha n$	$A \sin \alpha n + B \cos \alpha n$
$n^t r^n$	$r^n(A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0)$
$r^n \sin \alpha n$	$Ar^n \sin \alpha n + Br^n \cos \alpha n$
$r^n \cos \alpha n$	$Ar^n \sin \alpha n + Br^n \cos \alpha n$

$a_n^{(p_1)} = A n 2^n$

$$A(n+1)\cancel{2}^{\cancel{n+1}} - \cancel{2} A n \cancel{2^n} = \cancel{2^n} \; 1/2$$

$A = \frac{1}{2}$,

3. particular de 5^n

$a_{n+1} - 2a_n = 5^n \qquad a_n^{(p_2)} = B \cdot 5^n$

$$B\, 5^{\cancel{n+1}} - 2 \cdot B \cdot \cancel{5^n} = \cancel{5^n}$$

$$3B = 1 \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{3}}$$

$$Q_n^{(P)} = Q_n^{(P_1)} + Q_n^{(P_2)}$$

$$= \frac{1}{2} n 2^n + \frac{1}{3} 5^n$$

$$Q_n = \alpha 2^n + \frac{1}{2} n 2^n + \frac{1}{3} 5^n$$

$$Q_0 = 7 = \alpha + \frac{1}{3} \qquad \alpha = 7 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{21-1}{3} = \frac{20}{3}$$

$$Q_n = \frac{20}{3} 2^n + \frac{1}{2} n 2^n + \frac{1}{3} 5^n$$

Múltiple Opción 5

Sea M_2 el conjunto de matrices 2×2 binarias (cero-uno) con el orden $\leq$ de precedencia (donde $A \leq B$ si y solo si $a_{ij} \leq b_{ij}$ para toda entrada (i,j)). Se recuerda que una cadena de M_2 es un subconjunto de M_2 totalmente ordenado para el orden $\leq$. Sea α el menor número de cadenas disjuntas en las que se puede descomponer $(M_2, \leq)$. Opciones:

A) $(M_2, \leq)$ es un retículo, y $\alpha = 3$;
B) $(M_2, \leq)$ es un retículo, y $\alpha = 4$;
C) $(M_2, \leq)$ es un retículo, y $\alpha = 5$;
D) $(M_2, \leq)$ es un retículo, y $\alpha = 6$;
E) $(M_2, \leq)$ no es un es retículo.

Sugerencia: considerar el diagrama de Hasse de $(M_2, \leq)$.

$$M_2 = \{(a,b,c,d) : a,b,c,d \in \{0,1\}\}$$

$$\# M_2 = 2^4 = 16$$

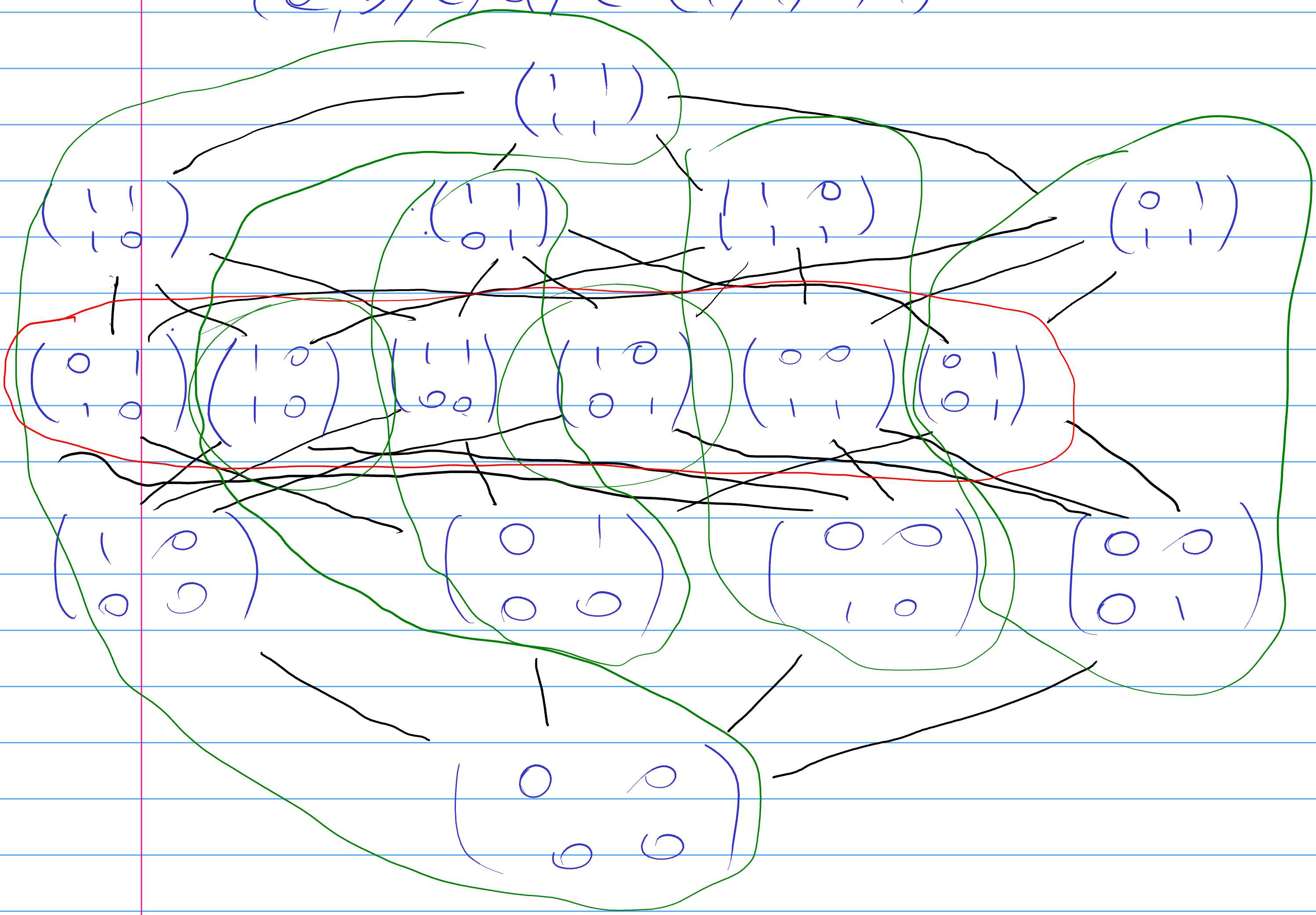
$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \le (a_2, b_2, c_2, d_2)$$

si $\quad a_1 \le a_2, \quad b_1 \le b_2$

$\quad c_1 \le c_2, \quad d_1 \le d_2$

$$(0,0,0,0) \le (a, b, c, d)$$

$$(a, b, c, d) \le (1, 1, 1, 1)$$



El **teorema de Dilworth** establece que la no existencia de una anticadena de tamaño $n+1$ en S es una condición necesaria y suficiente para que S sea la unión de n órdenes totales o cadenas. Esto motiva preguntas sobre el tamaño de la anticadena máxima.

Múltiple Opción 6

Contar la cantidad de subconjuntos de 4 elementos de $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$ tales que la distancia entre toda pareja de elementos sea de 3 o más. A) $\binom{94}{3}$; B) $\binom{94}{4}$; C) $\binom{94}{5}$; D) $\binom{94}{6}$.
Aclaración: dados $n < m$, la distancia entre n y m es $m - n$.

$$X = \{a, b, c, d\} \subseteq \{1, \ldots, 100\}$$

$$1 \leq a < b < c < d \leq 100$$

$$d_1 = \cancel{a} - 1 \geq 0$$

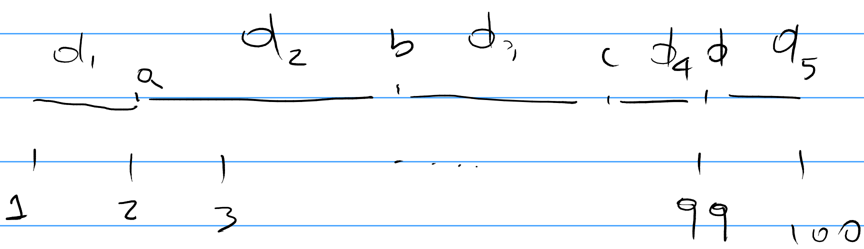
$$d_2 = \cancel{b} - \cancel{a} \geq 3$$

$$d_3 = \cancel{c} - \cancel{b} \geq 3$$

$$d_4 = \cancel{d} - \cancel{c} \geq 3$$

$$d_5 = 100 - \cancel{d} \geq 0$$

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 99$$



$d_1 + d_2 + \cdots + d_5 = 90$

$d_i \geq 0 \qquad CR_{90}^{5}$

$= C_{90}^{94} = \boxed{C_4^{94}}$

EJERCICIO 4 Si $f(x) = \sum_{n=0} a_n x^n$, indique cuál es la sucesión asociada a la función generatriz $\frac{f(x)(1-x^3)}{(1-x)}$.

Opciones:

A) $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + a_1 + a_2 + a_3, a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \ldots$.

B) $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3 + a_4, \ldots$.

C) $a_0, a_0 + a_1, 2a_0 + a_1 + a_2, 2a_0 + 2a_1 + a_2 + a_3, 2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4, \ldots$.

D) $a_0, 2a_0 + a_1, 2a_0 + 2a_1 + a_2, 2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + a_3, 2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4, \ldots$.

E) $a_0, a_0 + 2a_1, a_0 + 2a_1 + 3a_2, a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3, a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 5a_4, \ldots$.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_0 + a_1, \quad b_2 = a_0 + a_1 + a_2$

$\ldots$

$$\left(\frac{f(x)}{1-x}\right)(1-x^3)$$

$$= \frac{f(x)}{1-x} - \frac{x^3 f(x)}{1-x}$$

$$= a_0 + (a_0+a_1)x + (a_0+a_1+a_2)x^2 +$$

$$(\cancel{a_0}+a_1+a_2+a_3)x^3 + (\cancel{a_0}+\cancel{a_1}+a_2+a_3+a_4)x^4 + \cdots$$

$$\cancel{-a_0x^3} - \cancel{(a_0+a_1)x^4} - (a_0+a_1+a_2)x^5 - \cdots$$

$$= a_0 + (a_0+a_1)x + (a_0+a_1+a_2)x^2 +$$

$$(a_1+a_2+a_3)x^3 + (a_2+a_3+a_4)x^4 + \cdots$$

$$\frac{1-x^3}{1-x} = 1+x+x^2$$

Ejercicio 12. (Primer parcial 2009)
Sea a_n, $n \geq 0$, la cantidad de palabras de n letras A o B, tales que después de una A no puede venir una B (suponemos que $a_0 = 1$). Entonces, la función generatriz asociada a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es:

a. $\dfrac{1}{1-x}$ **b.** $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. **c.** $\dfrac{x}{(1-x)^2}$. **d.** $\dfrac{x}{1-x}$.

$n=0 \longrightarrow a_0 = 1$

$n=1$, $a_1 = 2$ A, B

$n=2$, AA, BA, BB

$a_2 = 3$

$n=3$, AAA, BAA, BBA, BBB

$a_3 = 4$

$$\boxed{a_n = n+1}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

$$= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)'$$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$a_{n+1} = a_n + 1 \quad , \quad a_0 = 1$$

$$\forall \quad n \geq 0$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 + \underline{a_1} x + \underline{a_2} x^2 + \underline{a_3} x^3 + \cdots$$

$$= 1 + (\underline{a_0} + \underline{1}) \underline{x} + (\underline{a_1} + 1) \underline{x^2} +$$

$$(\underline{a_2} + 1) \underline{x^3} + \cdots$$

$$= a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$= x (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$

$$+ \frac{1}{1-x}$$

$$= x f(x) + \frac{1}{1-x} = f(x)$$

$$\Rightarrow f(x)(1-x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Múltiple Opción 4

Sea a_n la cantidad de secuencias de largo n formadas con los números 0, 1, 2, 3 y 4 tales que dos entradas consecutivas difieren en magnitud exactamente en 1 y además la última entrada de la secuencia es 1 o 3. Hallar a_{21}.

Sugerencia: plantear una recurrencia homogénea de segundo orden para a_n.

(A) 3×2^{10}; (B) 2×3^{10}; (C) 3^{11}; (D) 5×2^{10}; (E) 4×3^{10}.

$n=1 \longrightarrow$ 1, 3 $\qquad a_1 = 2$

$n=2 \longrightarrow$ 01, 21, 23, 43 $\qquad a_2 = 4$

$n=3$, 101, 121, 321, 123, 323, 343 $\qquad a_3 = 6$

$n=4$, 0101, 2101, 0121, 2121, 2321, 4321, 0123, 2123, 2323, 4323, 2343, 4343, $\qquad a_4 = 12$

Si n par $\quad a_n = 2a_{n-1}$

si n impar $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + a_{n-1}$

$= \frac{3}{2} a_{n-1}$

$a_1 = 2$, $a_2 = 2 \cdot a_1$, $a_3 = \frac{3}{2} a_2$

$= 3 \cdot a_1$

$a_4 = 2 a_3 = 6 a_1 \dots$

$a_5 = \frac{3}{2} \cdot a_4 = 3 \cdot a_3$

$$\boxed{a_{2k+1} = 3\, a_{2k-1}}$$

$2k+1 = 21 = 10 \cdot 2 + 1$

$a_{21} = 3\, a_{19} = 3^2\, a_{17} = \dots = 3^{10} \cdot a_1$

$= 3^{10} \cdot 2$