Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 9
Funciones Generatrices

Ejercicio 1. Demuestre que la función generatriz $f(x) = 1 - x$ es invertible y encuentre su inversa (si ya fue visto en Teórico, repase la demostración y escríbala).

Ejercicio 2. Para cada una de las siguientes sucesiones exprese la correspondiente función generatriz como cociente de polinomios o como suma finita de estos.

Como ejemplo si la sucesión es $(1, 1, 1, \ldots)$ *la respuesta válida es* $\frac{1}{1-x}$ *y no es* $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, *ni tampoco es* $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$.

a. $(C_0^6, C_1^6, C_2^6, \ldots, C_6^6, 0, 0, \ldots)$

b. $(C_1^6, 2C_2^6, \ldots, 6C_6^6, 0, 0, \ldots)$

c. $(1, -1, 1, -1, \ldots)$

d. $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$

e. $(0, 0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, \ldots)$

f. $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$

g. $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$

h. $(0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots)$

i. $(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \ldots)$

j. $(0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, \ldots)$

Ejercicio 3. Determine la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices.

a. $f(x) = (2x - 3)^3$

b. $f(x) = \frac{x^3}{1-x}$

c. $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$

d. $f(x) = \frac{1}{1+3x}$

e. $f(x) = \frac{1}{2-x}$

f. $f(x) = \frac{3x^6-9+1}{1-x}$

Ejercicio 4. (Examen febrero 2010)
La función generatriz asociada a la sucesión $(0, 0, a, 1, 0, a^2, 2, 0, a^3, 3, 0, a^4, 4, 0, a^5, ...)$ es:

a. $f(x) = \dfrac{a}{1 + ax^3} - \dfrac{x}{(1 + x^6)}$.

b. $f(x) = \dfrac{a}{1 + ax^3} - \dfrac{x}{(1 + x^3)^2}$.

c. $f(x) = \dfrac{ax^2}{1 - ax^3} + \dfrac{x^3}{(1 - x^3)^2}$.

d. $f(x) = \dfrac{a}{1 + ax^3} \cdot \dfrac{x}{(1 + x^3)^2}$.

Ejercicio 5.

(a) Hallar el coeficiente de x^8 en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^{10}$.
(b) Para cada n natural, hallar el coeficiente de x^8 en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^n$.
(c) Para cada natural n encontrar los coeficientes de x^5, x^8 y en general de x^r en $(1 + x + x^2)(1 + x)^n$ para $0 \leq r \leq n + 2$, $r \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 6. Hallar el coeficiente de x^{15} en las funciones:

- $x^3(1 - 2x)^{10}$.
- $\frac{x^3-5x}{(1-x)^3}$.
- $\frac{(1+x)^4}{(1-x)^4}$.

Ejercicio 7. Verifique que $(1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6)^{-1}$ es la función generatriz de la cantidad de formas en que podemos obtener un número n como suma de las tiradas de un dado (todas las necesarias).

Ejercicio 8. Hallar la función generatriz de la cantidad de formas que tiene un cajero automático de dar n pesos. Los cajeros sólo poseen billetes de 500, 1000 y 2000 pesos.

Ejercicio 9. Halle las funciones generatrices de $(0^3, 1^3, 2^3, 3^3, \dots)$ y de $s_n = \sum_{i=0}^{n} i^3$, y deduzca la fórmula

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Ejercicio 10. Halle la función generatriz asociada la sucesión dada por: $a_n = d_n/n!$ donde d_n denota los desórdenes de tamaño n. *Sugerimos utilizar la función generatriz exp*$(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Ejercicio 11. (Examen Diciembre 2009)
Resolver el siguiente sistema de relaciones de recurrencia:

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} - b_n \\ b_{n+1} = b_n - 3a_{n-1} \\ a_0 = 0,\ b_0 = 2, b_1 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 12. (Primer parcial 2009)
Sea a_n, $n \geq 0$, la cantidad de palabras de n letras A o B, tales que después de una A no puede venir una B (suponemos que $a_0 = 1$). Entonces, la función generatriz asociada a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es:

a. $\dfrac{1}{1-x}$ **b**. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. **c**. $\dfrac{x}{(1-x)^2}$. **d**. $\dfrac{x}{1-x}$.

Ejercicio 13. Halle la función generatriz de:

$$(0\cdot(-1),\ 1\cdot 0,\ 2\cdot 1,\ 3\cdot 2,\ \dots, i(i-1),\ \dots),$$

y una fórmula para:

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1).$$

Ejercicio 14.

a. Encuentre los primeros tres términos de la convolución $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} * (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de los siguientes pares de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

  i) $a_n = 1, b_n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
  ii) $a_n = 1, b_n = 2^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
  iii) $a_n = 1$, si $0 \leq n \leq 3; a_n = 0,\ \forall n \geq 4, b_n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

b. En cada caso halle c_n para todo n.

Funciones generatrices:

Dada la sucesión de números reales

$a_0, a_1, a_2, \dots$ definimos $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

Es como un polinomio con infinitos sumandos.

No nos interesa evaluar A, x es una variable abstracta.

Nos permiten hallar la cantidad

de soluciones a $x_1 + x_2 + x_3 = n$ con x_1 par, x_2 impar

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$.

Si $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$$\Rightarrow \quad A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad c_n = a_n + b_n$$

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \qquad d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

Def:

$A(x)$ es invertible si $\exists$ $B(x)$ tq

$$A(x) \cdot B(x) = 1 = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \dots$$

Ejercicio 1. Demuestre que la función generatriz $f(x) = 1 - x$ es invertible y encuentre su inversa (si ya fue visto en Teórico, repase la demostración y escríbala).

$A(x) = f(x) = 1 \cdot x^0 + (-1)\, x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + \cdots$

Hay que encontrar $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$

tq $\underbrace{(1-x) \cdot B(x)}_{} = 1$

podemos aplicar distributiva

$= 1 \cdot B(x) - x\, B(x)$

$= b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$

$\quad - b_0 x - b_1 x^2 - b_2 x^3 + \cdots$

$= b_0 + (b_1 - b_0) \cdot x + (b_2 - b_1) x^2 + (b_3 - b_2) x^3 + \cdots$

$= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1}) x^n$

$= 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \cdots$

$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot x^n$

para que se cumple eso tiene que pasar

$b_0 = 1$, $(b_1 - b_0) = 0$, $(b_2 - b_1) = 0$, $(b_3 - b_2) = 0$

$\ldots$ $b_0 = 1$ y $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $\ldots$ o sea

$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

Probamos entonces $(1-x) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$

$= 1$

Lo escribimos $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

Ejercicio 2. Para cada una de las siguientes sucesiones exprese la correspondiente función generatriz como cociente de polinomios o como suma finita de estos.

Como ejemplo si la sucesión es $(1, 1, 1, \ldots)$ *la respuesta válida es* $\frac{1}{1-x}$ *y no es* $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$*, ni tampoco es* $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$.

a. $(C_0^6, C_1^6, C_2^6, \ldots, C_6^6, 0, 0, \ldots)$

b. $(C_1^6, 2C_2^6, \ldots, 6C_6^6, 0, 0, \ldots)$

c. $(1, -1, 1, -1, \ldots)$

d. $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$

e. $(0, 0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, \ldots)$

f. $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$

g. $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$

h. $(0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots)$

i. $(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \ldots)$

j. $(0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, \ldots)$

a. $A(x) = C_0^6 \cdot x^0 + C_1^6\, x^1 + \cdots + C_6^6\, x^6$

$= (1 + x)^6$

b. $B(x) = C_1^6 \cdot x^0 + 2 \cdot C_2^6\, x^1 + 3\, C_3^6\, x^2 + \cdots + 6\, C_6^6\, x^5$

$= \left((1+x)^6\right)' = 6 \cdot (1+x)^5$ ← derivada

$= 6 \cdot \left(C_0^5 + C_1^5 \cdot x + C_2^5 \cdot x^2 + \cdots + C_5^5\, x^5 \right)$

$\Rightarrow 6 \cdot C_0^5 = C_1^6$

$6 \cdot C_1^6 = 2 \cdot C_2^6 \quad \cdots \quad 6 \cdot C_6^6 = 6\, C_5^5$

c. $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, \rightsquigarrow C(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

$c_n = (-1)^n \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n}$$

d. $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ $= 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 1 x^4 + \cdots$

$$= x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \cdots$$

$$= x^4 (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$$

$$= x^4 \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x^4}{1-x}$$

e. $(0, 0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, \ldots)$

$$F(x) = 3x^3 - 3x^4 + 3x^5 - 3x^6 \cdots$$

$$= 3x^3 (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots)$$

mismo truco (factor común)

$$= 3x^3 \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{3x^3}{1+x}$$

f. $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$

$$F(x) = 1 + 0 \cdot x^1 + x^2 + 0 x^3 + x^4 + \cdots$$

$\shortparallel$

$H(x^2)$ $= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots = 1 + (x^2)^1 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \cdots$

$H(x)$
$= 1 + x + x^2 + \cdots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \cdots$$

$$= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

g. $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$

h. $(0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots)$

i. $(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \ldots)$

j. $(0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, \ldots)$

g. $G(x) = 1 + 2\cdot x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \cdots$

$$= 2^0 + 2^1 \cdot x^1 + 2^2 \cdot x^2 + 2^3 \cdot x^3 + \cdots$$

$$= (2\cdot x)^0 + (2\cdot x)^1 + (2\cdot x)^2 + (2\cdot x)^3 + \cdots$$

$$= \frac{1}{1-2x}$$

h. $x^2 + a x^3 + a^2 x^4 + \cdots$

$$= x^2 (1 + a x + a^2 x^2 + \cdots)$$

$$= \frac{x^2}{1 - ax}$$

j. $x^2 + b x^3 + a x^4 + b^2 x^5 + a^2 x^6 + \cdots$

$$= x^2 + a x^4 + a^2 x^6 + \cdots +$$
$$b x^3 + b^2 x^5 + b^3 x^7 + \cdots$$

$$= x^2 (1 + a x^2 + a^2 x^4 + \cdots) +$$
$$b x^3 (1 + b x^2 + b^2 x^4 + \cdots)$$

$$= \frac{x^2}{1 - a x^2} + \frac{b x^3}{1 - b x^2}$$