Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 9
Funciones Generatrices

Ejercicio 1. Demuestre que la función generatriz $f(x) = 1 - x$ es invertible y encuentre su inversa (si ya fue visto en Teórico, repase la demostración y escríbala).

Ejercicio 2. Para cada una de las siguientes sucesiones exprese la correspondiente función generatriz como cociente de polinomios o como suma finita de estos.

Como ejemplo si la sucesión es $(1, 1, 1, \ldots)$ la respuesta válida es $\frac{1}{1-x}$ y no es $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, ni tampoco es $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$.

- **a.** $(C^6_0, C^6_1, C^6_2, \ldots, C^6_6, 0, 0, \ldots)$
- **b.** $(C^6_1, 2C^6_2, \ldots, 6C^6_6, 0, 0, \ldots)$
- **c.** $(1, -1, 1, -1, \ldots)$
- **d.** $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$
- **e.** $(0, 0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, \ldots)$
- **f.** $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$
- **g.** $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$
- **h.** $(0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots)$
- **i.** $(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \ldots)$
- **j.** $(0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, \ldots)$

Ejercicio 3. Determine la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices.

- **a.** $f(x) = (2x - 3)^3$
- **b.** $f(x) = \frac{x^3}{1-x}$
- **c.** $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$
- **d.** $f(x) = \frac{1}{1+3x}$
- **e.** $f(x) = \frac{1}{2-x}$
- **f.** $f(x) = \frac{3x^6-9+1}{1-x}$

Ejercicio 4. (Examen febrero 2010)
La función generatriz asociada a la sucesión $(0, 0, a, 1, 0, a^2, 2, 0, a^3, 3, 0, a^4, 4, 0, a^5, \ldots)$ es:

- **a.** $f(x) = \dfrac{a}{1 + ax^3} - \dfrac{x}{(1 + x^6)}$.
- **b.** $f(x) = \dfrac{a}{1 + ax^3} - \dfrac{x}{(1 + x^3)^2}$.
- **c.** $f(x) = \dfrac{ax^2}{1 - ax^3} + \dfrac{x^3}{(1 - x^3)^2}$.
- **d.** $f(x) = \dfrac{a}{1 + ax^3} \cdot \dfrac{x}{(1 + x^3)^2}$.

Ejercicio 5.

(a) Hallar el coeficiente de x^8 en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^{10}$. $= \dfrac{1}{(1-x)^{10}} = \sum_{n=0}^{\infty} CR(10,n)\, x^n$

$CR(10,8)$

(b) Para cada n natural, hallar el coeficiente de x^8 en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^n$.

(c) Para cada natural n encontrar los coeficientes de x^5, x^8 y en general de x^r en $(1 + x + x^2)(1 + x)^n$ para $0 \le r \le n + 2$, $r \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 6. Hallar el coeficiente de x^{15} en las funciones:

- $x^3(1 - 2x)^{10}$.
- $\frac{x^3-5x}{(1-x)^3}$.
- $\frac{(1+x)^4}{(1-x)^4}$.

Ejercicio 7. Verifique que $(1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6)^{-1}$ es la función generatriz de la cantidad de formas en que podemos obtener un número n como suma de las tiradas de un dado (todas las necesarias).

Ejercicio 8. Hallar la función generatriz de la cantidad de formas que tiene un cajero automático de dar n pesos. Los cajeros sólo poseen billetes de 500, 1000 y 2000 pesos.

Ejercicio 9. Halle las funciones generatrices de $(0^3, 1^3, 2^3, 3^3, \ldots)$ y de $s_n = \sum_{i=0}^{n} i^3$, y deduzca la fórmula

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Ejercicio 10. Halle la función generatriz asociada la sucesión dada por: $a_n = d_n/n!$ donde d_n denota los desórdenes de tamaño n. *Sugerimos utilizar la función generatriz exp*$(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Ejercicio 11. (Examen Diciembre 2009)
Resolver el siguiente sistema de relaciones de recurrencia:

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} - b_n \\ b_{n+1} = b_n - 3a_{n-1} \\ a_0 = 0, \ b_0 = 2, b_1 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 12. (Primer parcial 2009)
Sea a_n, $n \geq 0$, la cantidad de palabras de n letras A o B, tales que después de una A no puede venir una B (suponemos que $a_0 = 1$). Entonces, la función generatriz asociada a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es:

a. $\dfrac{1}{1-x}$ **b**. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. **c**. $\dfrac{x}{(1-x)^2}$. **d**. $\dfrac{x}{1-x}$.

Ejercicio 13. Halle la función generatriz de:

$$(0 \cdot (-1),\ 1 \cdot 0,\ 2 \cdot 1,\ 3 \cdot 2,\ \ldots, i(i-1),\ \ldots),$$

y una fórmula para:

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1).$$

Ejercicio 14.

a. Encuentre los primeros tres términos de la convolución $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} * (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de los siguientes pares de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

i) $a_n = 1, b_n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
ii) $a_n = 1, b_n = 2^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
iii) $a_n = 1$, si $0 \leq n \leq 3; a_n = 0,\ \forall n \geq 4, b_n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

b. En cada caso halle c_n para todo n.

Funciones generatrices:

Dada la sucesión de números reales

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ definimos $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$

Es como un polinomio con infinitos sumandos.

No nos interesa evaluar A, x es una variable abstracta.

Nos permiten hallar la cantidad

de soluciones a $x_1 + x_2 + x_3 = n$ con x_1 par, x_2 impar

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$.

Si $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$$\Rightarrow \quad A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad c_n = a_n + b_n$$

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \qquad d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

Def:

$A(x)$ es invertible si $\exists$ $B(x)$ tq

$$A(x) \cdot B(x) = 1 = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \cdots$$

Ejercicio 1. Demuestre que la función generatriz $f(x) = 1 - x$ es invertible y encuentre su inversa (si ya fue visto en Teórico, repase la demostración y escríbala).

$A(x) = f(x) = 1 \cdot x^0 + (-1)\, x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + \cdots$

Hay que encontrar $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$

tq $\underbrace{(1-x) \cdot B(x)}$ $= 1$

podemos aplicar distributiva

$= 1 \cdot B(x) - x\, B(x)$

$= b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$

$- b_0 x - b_1 x^2 - b_2 x^3 + \cdots$

$= b_0 + (b_1 - b_0) \cdot x + (b_2 - b_1) x^2 + (b_3 - b_2) x^3 + \cdots$

$= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1}) x^n$

$= 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \cdots$

$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot x^n$

$\hookrightarrow$ para que se cumple eso tiene que pasar

$b_0 = 1$, $(b_1 - b_0) = 0$, $(b_2 - b_1) = 0$, $(b_3 - b_2) = 0$

$\ldots$ $b_0 = 1$ y $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $\ldots$ o sea

$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

Probamos entonces $(1-x) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$

$= 1$

Lo escribimos $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

Ejercicio 2. Para cada una de las siguientes sucesiones exprese la correspondiente función generatriz como cociente de polinomios o como suma finita de estos.

Como ejemplo si la sucesión es $(1,1,1,\ldots)$ *la respuesta válida es* $\frac{1}{1-x}$ *y no es* $1+x+x^2+x^3+\cdots$*, ni tampoco es* $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$.

a. $(C_0^6, C_1^6, C_2^6, \ldots, C_6^6, 0, 0, \ldots)$

b. $(C_1^6, 2C_2^6, \ldots, 6C_6^6, 0, 0, \ldots)$

c. $(1, -1, 1, -1, \ldots)$

d. $(0,0,0,0,1,1,1,1,1,\ldots)$

e. $(0,0,0,3,-3,3,-3,3,\ldots)$

f. $(1,0,1,0,1,0,1,0,1,\ldots)$

g. $(1,2,4,8,16,32,64,\ldots)$

h. $(0,0,1,a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,\ldots)$

i. $(1,0,2,0,4,0,8,0,16,0,32,0,64,0,128,\ldots)$

j. $(0,0,1,b,a,b^2,a^2,b^3,a^3,b^4,a^4,b^5,a^5,b^6,\ldots)$

a. $A(x) = C_0^6 \cdot x^0 + C_1^6\, x^1 + \cdots + C_6^6\, x^6$

$= (1+x)^6$

b. $B(x) = C_1^6 \cdot x^0 + 2 \cdot C_2^6\, x^1 + 3\, C_3^6\, x^2 + \cdots + 6\, C_6^6\, x^5$

$= \left((1+x)^6\right)' = 6 \cdot (1+x)^5$ ← derivada

$= 6 \cdot \left(C_0^5 + C_1^5 \cdot x + C_2^5 \cdot x^2 + \cdots + C_5^5\, x^5\right)$

$\Rightarrow 6 \cdot C_0^5 = C_1^6$

$6 \cdot C_1^5 = 2 \cdot C_2^6 \quad \cdots \quad 6 \cdot C_6^6 = 6\, C_5^5$

c. $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, \rightsquigarrow C(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

$c_n = (-1)^n$ $\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n}$$

$0 \; 1 \; 2 \; 3$

d. $(0,0,0,0,1,1,1,1,1,\ldots)$ $= 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 1 x^4 + \cdots$

$$= x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \cdots$$

$$= x^4 (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$$

$$= x^4 \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x^4}{1-x}$$

e. $(0,0,0,3,-3,3,-3,3,\ldots)$

$$F(x) = 3x^3 - 3x^4 + 3x^5 - 3x^6 \cdots$$

$$= 3x^3 (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots)$$

mismo truco (factor común)

$$= 3x^3 \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{3x^3}{1+x}$$

f. $(1,0,1,0,1,0,1,0,1,\ldots)$

$$F(x) = 1 + 0 \cdot x^1 + x^2 + 0 x^3 + x^4 + \cdots$$

$\shortparallel$

$\Pi(x^2)$ $= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots = 1 + (x^2)^1 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \cdots$

$\Pi(x) = 1 + x + x^2 + \cdots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \cdots$$

$$= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

g. $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$

h. $(0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots)$

i. $(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \ldots)$

j. $(0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, \ldots)$

g. $G(x) = 1 + 2\cdot x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \cdots$

$$= 2^0 + 2^1 \cdot x^1 + 2^2 \cdot x^2 + 2^3 \cdot x^3 + \cdots$$

$$= (2\cdot x)^0 + (2\cdot x)^1 + (2\cdot x)^2 + (2\cdot x)^3 + \cdots$$

$$= \frac{1}{1-2x}$$

h. $x^2 + ax^3 + a^2x^4 + \cdots$

$$= x^2 (1 + ax + a^2x^2 + \cdots)$$

$$= \frac{x^2}{1-ax}$$

j. $x^2 + bx^3 + ax^4 + b^2x^5 + a^2x^6 + \cdots$

$$= x^2 + a x^4 + a^2 x^6 + \cdots +$$

$$b x^3 + b^2 x^5 + b^3 x^7 + \cdots$$

$$= x^2 \left(1 + a x^2 + a^2 x^4 + \cdots \right) +$$

$$b x^3 \left(1 + b x^2 + b^2 x^4 + \cdots \right)$$

$$= \frac{x^2}{1 - a x^2} + \frac{b x^3}{1 - b x^2}$$

$$\frac{1}{1 - \alpha x^2} = 1 + \alpha x^2 + \alpha^2 x^4 + \alpha^3 x^6 + \cdots$$

a. $f(x) = (2x-3)^3$

```
? (2*x-3)^3
%1 = 8*x^3 - 36*x^2 + 54*x - 27
?
```

$a_0 = -27,\ a_1 = 54,\ a_2 = -36,\ a_3 = 8,\ a_{n+4} = 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$

$\boxed{-27, 54, -36, 8, 0, 0, 0, 0, \dots}$

$$(2x-3)^m = \sum_{n=0}^{m} (2x)^n \cdot (-3)^{m-n} \cdot C_n^m$$

$$= (-3)^m \cdot x^0 + C_1^m (-3)^{m-1}\, 2\, x^1 + \dots + C_m^m 2^m x^m$$

b. $f(x) = \frac{x^3}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$\frac{x^3}{1-x} = x^3 \cdot \frac{1}{1-x} = x^3(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$$

$$= x^3 + x^4 + x^5 + \dots$$

$0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots$

$b_0 = b_1 = b_2 = 0,\quad b_{n+3} = 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \cdots$$

e. $f(x) = \frac{1}{2-x}$ $= \frac{1}{2 - \frac{2x}{2}} = \frac{1}{2(1-x/2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x/2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1 + x/2 + x^2/4 + x^3/8 + \cdots\right) = \underline{\frac{1}{2}} + x/\underline{4} + x^2/\underline{8} + x^3/\underline{16} + \cdots$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad (e_n) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \cdot x^n \qquad e_0 = \frac{1}{2},\ e_1 = \frac{1}{4},\ e_2 = \frac{1}{8}, \cdots$$

$$e_n = \frac{1}{2^{n+1}}$$

f. $f(x) = \cancel{\frac{3x^6-9+1}{1-x}}$ $= \frac{3x^6 - 9x^3 + 1}{1-x}$

$$= 3\cdot\frac{x^6}{1-x} - 9\cdot\frac{x^3}{1-x} + \frac{1}{1-x}$$

$$\begin{aligned} &= 3x^6\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right) \\ &- 9x^3\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right) \\ &+ \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right) \end{aligned}$$

$$= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3x^6 + 3x^7 + 3x^8 + \dots$$

$$\qquad\qquad -9x^3 - 9x^4 - 9x^5 - 9x^6 - 9x^7 - 9x^8 - \dots$$

$$+ 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq n \leq 2 \\ -8 & \text{si} \quad 3 \leq n \leq 5 \\ -5 & \text{si} \quad n \geq 6 \end{cases}$$

$$(f_n) = 1, 1, 1, -8, -8, -8, -5, -5, -5, \dots$$

d. $$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 + ax + a^2x^2 + \dots = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$\hookrightarrow \frac{1}{1-ax}$ con $\boxed{a = -1}$

$$(d_n) = 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

$$\frac{1}{1+3x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^n$$

$\hookrightarrow \boxed{a = -3}$

Proposición : $\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} CR(m,n)\, x^n$

si $m=2$, $CR(2,n) = C(n+1,n) = n+1$

$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$

Ejercicio 4. (Examen febrero 2010)
La función generatriz asociada a la sucesión $(0, 0, a, 1, 0, a^2, 2, 0, a^3, 3, 0, a^4, 4, 0, a^5, \ldots)$ es:

1 4 7 10

a. $f(x) = \frac{a}{1+ax^3} - \frac{x}{(1+x^6)}$.

b. $f(x) = \frac{a}{1+ax^3} - \frac{x}{(1+x^3)^2}$.

c. $f(x) = \frac{ax^2}{1-ax^3} + \frac{x^3}{(1-x^3)^2}$.

d. $f(x) = \frac{a}{1+ax^3} \cdot \frac{x}{(1+x^3)^2}$.

$f(x) = 0x^0 + 0\cdot x^1 + \underline{ax^2} + x^3 + 0x^4 + \underline{a^2x^5} + 2x^6 + 0x^7 \ldots$

$3\cdot 0+2 \quad 3\cdot 1+2 \quad 3\cdot 2+2 \quad 3\cdot 3+2$

$= ax^{2} + a^2x^{5} + a^3x^{8} + a^4x^{11} + \cdots$
$+ x^3 + 2x^6 + 3x^9 + 4x^{12} + \cdots$

$= a\cdot x^2(1 + ax^3 + a^2x^6 + a^3x^9 + \cdots) +$
$x^3(1 + 2x^3 + 3x^6 + 4x^9 + \cdots)$

$= a\cdot x^2(1 + ax^3 + (ax^3)^2 + (ax^3)^3 + \cdots)$
$+ x^3(1 + 2\cdot x^3 + 3\cdot(x^3)^2 + 4(x^3)^3 + \cdots)$

$= \underbrace{\frac{ax^2}{1-ax^3}}_{F4} + \underbrace{\frac{x^3}{(1-x^3)^2}}_{F6}$

Fórmula madre

① $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

② $$\frac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{nk}$$

③ $$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2 x^2 + a^3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$$

④ $$\frac{1}{1-ax^k} = 1 + a x^k + a^2 x^{2k} + a^3 x^{3k} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^{nk}$$

⑤ $$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} CR(m,n)\, x^n$$

↳ si $m=2$ $\quad \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

⑥ $$\frac{1}{(1-x^k)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} CR(m,n)\, x^{n \cdot k}$$

↳ si $m=2$, $k=3$ $\quad \frac{1}{(1-x^3)^2} = 1 + 2x^3 + 3x^6 + 4x^9 + \cdots$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

↓ derivamos de ambos lados

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

↓ derivamos de vuelta

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 2\cdot 3\, x + 3\cdot 4\, x^2 + 4\cdot 5\, x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + \frac{2\cdot 3}{2} x + \frac{3\cdot 4}{2} x^2 + \frac{4\cdot 5}{2} x^3 + \cdots$$

$$\begin{array}{ccc} \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ C(3,2) & C(4,2) & C(5,2) \quad \cdots \\ C(3,1) & C(4,2) & C(5,3) \end{array}$$

$$= CR(3,0) + CR(3,1)\, x^1 + CR(3,2)\, x^2 + \cdots$$

■ $\frac{(1+x)^4}{(1-x)^4}$. $\longrightarrow$ coeficiente de x^{15}

$$(1+x)^4 = \sum_{i=0}^{4} C_i^4 x^i = C_0^4 + C_1^4 x + C_2^4 x^2 + C_3^4 x^3 + C_4^4 x^4$$

$$= 1 + 4x^1 + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

$$\frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} CR(4,n)\, x^n$$

$$\frac{(1+x)^4}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} CR(4,n)\, x^n$$

$$+ 4 \sum_{n=0}^{\infty} CR(4,n)\, x^{n+1}$$

$$+ 6 \sum_{n=0}^{\infty} CR(4,n)\, x^{n+2}$$

$$+ 4 \sum_{n=0}^{\infty} CR(4,n)\, x^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} CR(4,n)\, x^{n+4}$$

El coef de x^{15} de $\frac{(1+x)^4}{(1-x)^4}$ es

$\hookrightarrow CR(4,15) + 4 \cdot CR(4,14) + 6\,CR(4,13) + 4\,CR(4,12)$
$+ CR(4,11)$

Ejercicio 11. (Examen Diciembre 2009)
Resolver el siguiente sistema de relaciones de recurrencia:

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} - b_n \\ b_{n+1} = b_n - 3a_{n-1} \\ a_0 = 0, b_0 = 2, b_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = -a_n - b_{n+1} & \forall\, n \geq 0 \\ b_{n+2} = b_{n+1} - 3a_n & \forall\, n \geq 0 \end{cases}$$

$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$\cdot\ a_1 = -a_0 - b_1$
$\cdot\ a_2 = -a_1 - b_2$
$\cdot\ a_3 = -a_2 - b_3$
$\vdots$

$b_2 = b_1 - 3a_0$
$b_3 = b_2 - 3a_1$
$b_4 = b_3 - 3a_2$
$\vdots$

$a_1 \cdot x = -a_0 \cdot x - b_1 \cdot x$
$a_2 \cdot x^2 = -a_1 \cdot x^2 - b_2 x^2$
$a_3\, x^3 = -a_2\, x^3 - b_3 x^3$
$+ \quad \vdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

$$A(x) = -x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - (B(x) - 2)$$

$B(x) = \underbrace{b_0 + b_1 x}_{} + b_2 x^2 + \cdots$
$B(x) - b_0 = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$
$B(x) - 2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$

$B(x) - b_1 x - b_0 = \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n$

$$A(x) = -xA(x) - B(x) + 2$$

$$A(x)(1+x) + B(x) = 2$$

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 - 3a_0 \\ b_3 &= b_2 - 3a_1 \\ b_4 &= b_3 - 3a_2 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b_2x^2 &= b_1x^2 - 3a_0x^2 \\ b_3x^3 &= b_2x^3 - 3a_1x^3 \\ b_4x^4 &= b_3x^4 - 3a_2x^4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$+$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_nx^{n+1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+2}$$

$$\parallel$$

$$B(x) - b_1x - b_0 = x\sum_{n=1}^{\infty} b_nx^n - 3x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

$$\underbrace{B(x)}\ \underbrace{-x-2} = \underbrace{x}\left(B(x) \underline{-2}\right) - 3x^2A(x)$$

$$A(x)\cdot(3x^2) + B(x)(1-x) = \underbrace{-2x + x + 2} = 2 - x$$

$$\begin{cases} A(x)(1+x) + B(x) = 2 \quad \leadsto \quad B(x) = 2 - A(x)(1+x) \\ A(x)(3\cdot x^2) + B(x)(1-x) = 2 - x \end{cases}$$

$$\underbrace{A(x)\cdot 3x^2} + \left(2 - A(x)\underline{(1+x)}\right)\underline{(1-x)} = 2 - x$$

$$A(x)\cdot 3x^2 + 2(1-x) - A(x)(1+x)(1-x) = 2 - x$$

$$A(x)\left(3x^2 - (1+x)(1-x)\right) + 2(1-x) = 2 - x$$

$$A(x)\left(3x^2 - (1-x^2)\right) = x$$

$$A(x)\left(\overset{4}{\cancel{2}}x^2 - 1\right) = x \quad \to \quad \boxed{A(x) = -\frac{x}{1-4x^2}}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \quad , \quad \frac{-x}{1-4x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\underset{\overset{\|}{(-2)^n}}{4^n})\, x^{2n+1} = A(x)$$

$$= -x^1 - 4x^3 - 4^2 x^5 - 4^3 x^7 \dots$$

$$= -2^0 \cdot x^1 - 2^2 \cdot x^3 - 2^4 \cdot x^5 - 2^6 x^7 \dots$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ -2^{n-1} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$B = 2 - A(x)(1+x) = 2 - A(x) - xA(x)$$

$$= 2 +$$

$$+ x^1 + 2^2 x^3 + 2^4 x^5 + 2^6 x^7 + \dots \leftarrow -A(x)$$

$$+ x^2 + 2^2 x^4 + 2^4 x^6 + 2^6 x^8 + \dots \leftarrow -xA(x)$$

$$= 2 + x^1 + x^2 + 2^2 x^3 + 2^2 x^4 + 2^4 x^5 + 2^4 x^6 + 2^6 \cdot x^7 + 2^6 x^8 + \dots$$

$$b_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \text{ impar} \\ 2^{n-2} & \text{si } n \text{ par}, \ n \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} 0 \quad 3 \quad 6 \quad 9 \quad 12 \\ (1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,\ldots) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$$

$$x \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} \rightsquigarrow (0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,\ldots)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} + x \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} \rightsquigarrow (1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,\ldots)$$

Ejercicio 13. Halle la función generatriz de:

$$(0\cdot(-1),\ 1\cdot 0,\ 2\cdot 1,\ 3\cdot 2,\ \ldots, i(i-1),\ \ldots),$$

y una fórmula para:

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1).$$

$$n=2 \quad \sum_{i=0}^{2} i(i-1) = 0\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2$$

$$n=3 \quad 0\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 = 2+6 = 8$$

$$n=4 \quad 8 + 4\cdot 3 = 8 + 12 = 20$$

$$n=5 \quad 20 + 5\cdot 4 = 40$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

der

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \underbrace{2\cdot 1} + 3\cdot 2\cdot x + 4\cdot 3\cdot x^2 + 5\cdot 4\cdot x^3 + \cdots$$

$$\frac{2x^2}{(1-x)^3} = 0\cdot(-1) + 1\cdot 0\cdot x + 2\cdot 1\cdot \underline{x^2} + 3\cdot 2x^3 + \cdots$$

$\longrightarrow$ es la f.g. buscada.

Si $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$A(x)\cdot \underset{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}{\underset{\parallel}{\frac{1}{1-x}}} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \qquad d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 1$$

$$\searrow \frac{A(x)}{1-x} = a_0 + (a_0+a_1)x +$$

$$(a_0+a_1+a_2)x^2 + (a_0+a_1+a_2+a_3)x^3 + \cdots$$

<u>Def</u>: $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$

$$A'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n$$

Se cumple:

- $\left(A(x) + B(x)\right)' = A'(x) + B'(x)$
- $\left(A(x)\cdot B(x)\right)' = A'(x)\,B(x) + A(x)\cdot B'(x)$
- $\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)' = \frac{A'(x)\,B(x) - A(x)\,B'(x)}{B(x)^2}$
- $\left(A(x)^n\right)' = n\cdot A'(x)\cdot A(x)^{n-1}$
- $\left(\frac{1}{A(x)}\right)' = -\frac{A'(x)}{A(x)^2}$

Entonces $\dfrac{2x^2}{(1-x)^3} \cdot \dfrac{1}{(1-x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)$$

$$\frac{2x^2}{(1-x)^4} = 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} CR(4,n)\, x^n$$

$$= 2x^2 \big(CR(4,0) + CR(4,1)\,x + CR(4,2)\,x^2 + \cdots \big)$$

$$= 0 + 0\cdot x + 2\cdot CR(4,0)\cdot x^2 + 2\,CR(4,1)\,x^3 + 2\,CR(4,2)\,x^4 + \cdots$$

$d_0 = 0,\ d_1 = 0,\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i-1) = 2\cdot CR(4, n-2)$ si $n \geq 2$

$$CR(4, n-2) = C(n+1, n-2) = \frac{(n+1)!}{(n-2)!\ 3!}$$

$$= \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-2)}\,(n-1)\cdot n\,(n+1)}{\cancel{(n-2)!}\ 3!} = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{6}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} i(i-1)$$