Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 6: Combinatoria V
Principio del Palomar

Ejercicio 1. Probar que en el mundo hay al menos tres personas que nacieron al mismo tiempo (mismo año, mes, día, hora, minuto y segundo, tomando hora universal de Greenwich).

Ejercicio 2. Probar que cualquier subconjunto de seis elementos del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$ debe contener dos elementos cuya suma sea 10.

Ejercicio 3. Probar que en una reunión cualquiera con dos o más personas siempre existen al menos dos personas que tienen la misma cantidad de amigos en esa reunión.

Ejercicio 4. Dados cinco punto de un cuadrado de lado 2, probar que hay al menos dos puntos cuya distancia es menor o igual que $\sqrt{2}$.

Ejercicio 5. Dado un número real x, denotamos mediante $\lceil x \rceil$ al menor entero y tal que $y \geq x$. Probar que toda función $f : A \to B$ donde $|A| > |B|$ tiene al menos $\lceil |A| \,/\, |B| \rceil$ elementos de A que toman el mismo valor.

Ejercicio 6. Consideremos un tablero rectangular compuesto por 141 filas y 8 columnas, definiendo en total 141×8 celdas. Cada celda se pinta de blanco o de negro de forma tal que cada fila tenga exactamente cuatro celdas pintadas de negro. Demostrar que hay al menos 3 filas con igual secuencia de colores.

Ejercicio 7. Determinar la mayor cantidad de caballos que se pueden poner en un tablero de ajedrez sin que ninguno pueda saltar hacia la posición de otro.
Recordar que si un caballo está en una casilla blanca (negra), salta hacia una casilla negra (blanca). Verificarlo en un tablero.

Ejercicio 8. Encontrar el menor entero positivo n que permita asegurar que, de cualquier forma que se elijan n enteros distintos entre 1 y 100 inclusive, habrá dos de ellos cuya suma sea igual a 50.

Ejercicio 9. En la carrera electoral, los contendientes Stridit, Szczupły y Coud, fueron a consultar, sin saberlo y por separado, al mismo gran gurú de las competencias electorales, el famoso Ferro Neto. ¡Todos querían el trono! El gurú percibió que los otros candidatos no estaban al tanto de esta consulta múltiple, así que les propuso a los tres el mismo conjuro:

- Para ganar tienen que, durante exactamente dos semanas, comer 21 veces la siguiente poción mágica: un medallón de semillas de algarrobo, rodeado de 5 aceitunas negras y salpicado de licor de Caribou. Cada día tienen que ingerir al menos una poción, y pueden comer tantas como quieran por día, siempre que, al cabo de 14 días hayan consumido exactamente 21 pociones mágicas.

Los candidatos anotaron con detalle el conjuro, juntos a sus respectivos asesores.

- ¡Atención! - agregó el famoso gurú - el conjuro no funcionará si ustedes cometen el siguiente pecado. Si sumando todas las pociones ingeridas durante algunos días **consecutivos** obtienen el terrible número seis, el conjuro caerá.

- ¿Puede repetir? - dijeron dos de los tres candidatos, en sus consultas personales.

- Por ejemplo - respondió el gurú - si ud. consume 1 poción el día uno, 3 pociones el día dos, 1 poción el día tres, 3 pociones el día cuatro, y 2 pociones el día cinco, ya habrá perdido todo el trabajo ¡y la magia ya no funcionará!

- ¿Cómo? - insistió Slim, quien no lograba comprender.

- Sí, porque entre el día 3, el día 4 y el día 5, suma exactamente seis pociones ingeridas, y ese es el número encantado que destruuye el conjuro.

- Ahh, claro, suspiró el candidato.

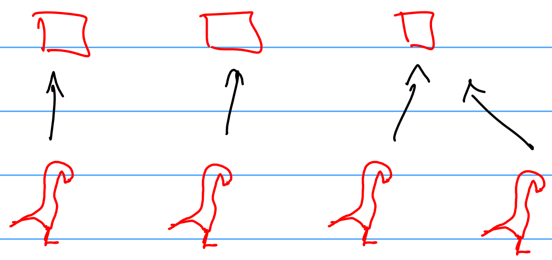
Stridit, en su día, y Szczupły, en el suyo, juntos a sus asesores electorales, pagaron la suma de 1 millón de dólares, y mandaron a comprar los productos a Argentina y Canadá, para armar los famosos conjuros y triunfar en la carrera electoral.

Coud, por su parte, quien se había llevado un lápiz y una libretita, acompañada de un solo asesor, el famoso economista Falora, se paró como atribulada, pensativa. Unos pasos la llevaron a una iluminada ventana del estudio del gurú, desde donde se veía una pequeña plaza, con colores ocres de un atardecer que la iba llenando de palomas buscando sus palomares para recogerse hasta la próxima madrugada. Fue entonces que giró, buscó su libretita e hizo unos inentedibles garabatos. Se la vio consultar a su compañero, y le respondió al gurú que ella no aceptaba la propuesta.

- ¿Qué cuenta hicieron Coud y Falora?
- Stridit y Szczupły: ¿lograron hacer efectivo el conjuro, o fueron estafados con un millón de dólares?

Principio del palomar:

Si tenemos n palomas y r palomares con $n > r$ entonces existe un palomar con al menos 2 palomas



En términos de funciones: si $f: A \to B$ función con $\# A > \# B \Rightarrow f$ no es inyectiva, o sea $\exists\ a, a' \in A$ con $a \neq a'$ y $f(a) = f(a')$.

Ejercicio 2. Probar que cualquier subconjunto de seis elementos del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$ debe contener dos elementos cuya suma sea 10.

$X \subset S = \{1, \ldots, 9\}$, $\# X = 6$

$\{1,9\}$
$\{2,8\}$
$\{3,7\}$
$\{4,6\}$
$\{5\}$

5 conjuntos que la unión me da $\{1,2,\ldots,9\}$

Tenemos 5 palomares: $\{1,9\}$, $\{2,8\}$, $\{3,7\}$, $\{4,6\}$ y $\{5\}$

si tomamos 6 elementos de $\{1,\ldots,9\}$ hay 2 que caen en el mismo conjunto entonces suman 10.

Ejercicio 1. Probar que en el mundo hay al menos tres personas que nacieron al mismo tiempo (mismo año, mes, día, hora, minuto y segundo, tomando hora universal de Greenwich).

Los palomares son las 6-tuplas $(A, \ , d, h, m, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

↳ año

↳ día

↳ hora

↳ minuto

↳ segundo

Observar que el día determina el mes.

Gustavo $\rightarrow$ $(1986, \ , -, -, \ldots)$

Cant, dad de palomeras (por regla del producto)
$\underline{118} \times 365 \times 24 \times 60 \times 60$

$=$

```
>>> 118*365*24*60*60
3,721,248,000
```

Hay aprox 8 mil millones de personas. hay por lo menos 2 que nacieron en el mismo momento.

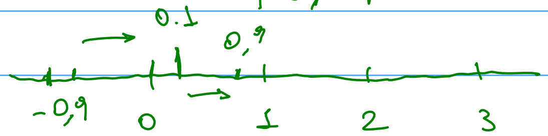
Ejercicio 5. Dado un número real x, denotamos mediante $\lceil x \rceil$ al menor entero y tal que $y \geq x$. Probar que toda función $f : A \to B$ donde $|A| > |B|$ tiene al menos $\lceil |A| / |B| \rceil$ elementos de A que toman el mismo valor.

$x \in \mathbb{R}$

$\lceil x \rceil = \min \{ n \in \mathbb{Z} : n \geq x \}$

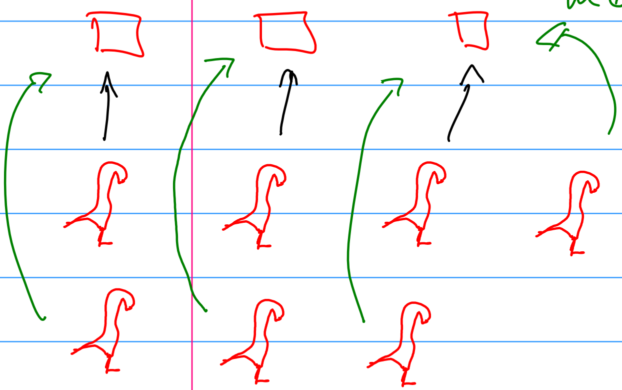
$\lceil 0,1 \rceil = 1$ $\quad$ $\lceil 0,9 \rceil = 1$

$\lceil -0,9 \rceil = 0$.



(Palomar generalizado)

equiv: Si tenemos n palomas y r palomares con $n > r$ $\Rightarrow$ hay un palomar con al menos $\lceil n/r \rceil$ palomas.



Teo de división entera: Sean $a, b \in \mathbb{N}$ y $b \neq 0$. Entonces existen únicos $q, r \in \mathbb{N}$ tq

$a = b \cdot q + r \qquad 0 \leq r < b$

$\hookrightarrow$ cociente (a,b) $\qquad \rightarrow$ resto (a,b)

Ej: $a = 21, \; b = 8$

$$\begin{array}{l|l} \overset{a}{21} & 8 \rightarrow b \\ \hline \underset{r}{5} & \underset{q}{2} \end{array}$$

$21 = 8 \cdot 2 + 5$

Escribimos $n = r \cdot q + r'$ $\qquad 0 \leq r' < r$

resto de la división de n por r.

$\hookrightarrow$ palomeras

$\lceil n/r \rceil = \begin{cases} q+1 & r' \neq 0 \\ q & r' = 0 \end{cases}$

$\frac{n}{r} = q + \frac{r'}{r}$

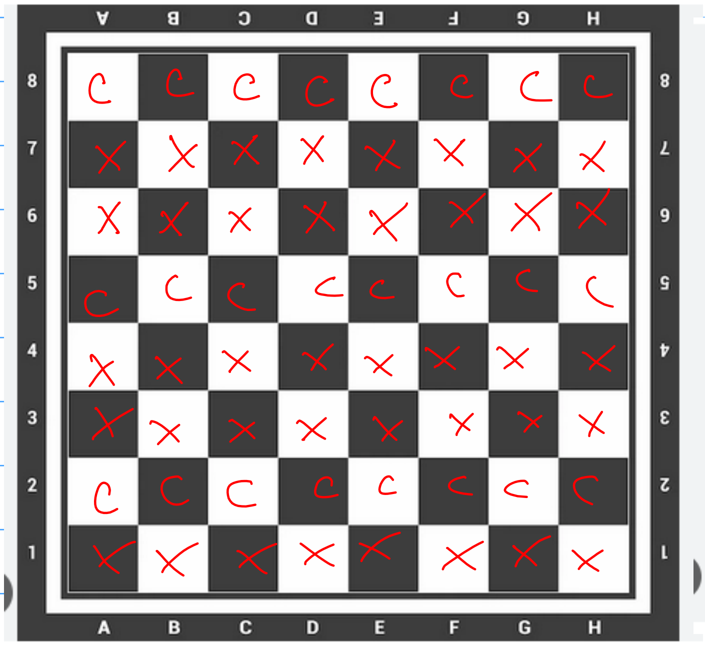
Caso 1: $r' \neq 0$, razonando por absurdo, supongamos que en cada palomar hay un número $\leq q$ de palomas. Entonces tendríamos una cantidad $\leq r \cdot q$ de palomas pero hay $r \cdot q + r' > rq$ palomas $\lightning$

Caso 2: Es similar la idea.

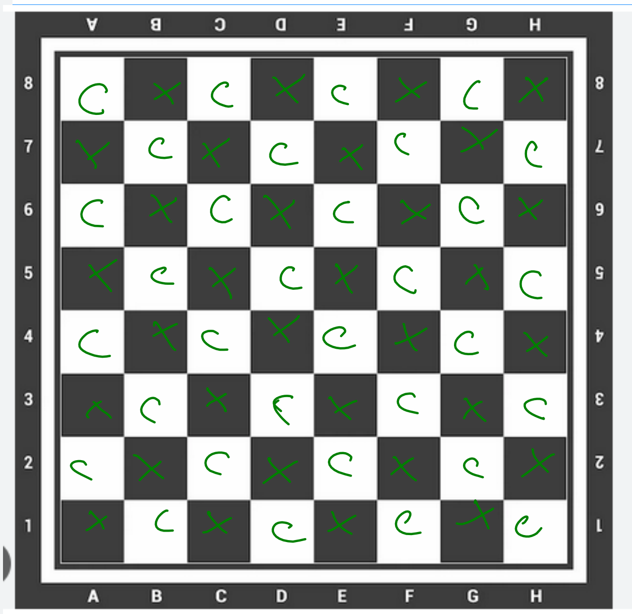
Volviendo al ej. Vicente encontró que nacieron $a = 134000000$ bebés en 2022 y hay $b = 31536000$ segundos en un años y $\lceil a/b \rceil = 5 \Rightarrow$ nacieron por lo menos 5 niños al mismo tiempo.

Ejercicio 7. Determinar la mayor cantidad de caballos que se pueden poner en un tablero de ajedrez sin que ninguno pueda saltar hacia la posición de otro.

Recordar que si un caballo está en una casilla blanca (negra), salta hacia una casilla negra (blanca). Verificarlo en un tablero.



↳ 24



↳ 32

¿es la mejor?