Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 2: COMBINATORIA

Ejercicio 1. Un alfabeto consta de 5 vocales y 22 consonantes. ¿Cuántas palabras de longitud 6 se pueden formar con tal alfabeto que no tengan ni dos consonantes ni dos vocales juntas?

Ejercicio 2. La final de un campeonato de fútbol ha terminado en empate y debe definirse por penales. Para patearlos, la directora técnica debe elegir en orden 5 jugadoras diferentes de un total de 11. ¿De cuántas formas puede hacerlo? Responder la misma pregunta si la capitana del equipo siempre patea el quinto penal.

Ejercicio 3.

(a) ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar usando todas las letras de la palabra *ÁRBOL*?

(b) ¿ Cuántas palabras de largo 3 se pueden formar usando letras distintas de la palabra *ÁRBOL* ?

(c) ¿ Cuántas palabras distintas pueden obtenerse permuntando las letras de la palabra *ALGORITMO*?

Ejercicio 4. En una prueba que consta de 10 preguntas un estudiante decide responder sólo 6, y quiere que al menos 3 de ellas estén entre las 5 primeras. ¿De cuántas formas distintas podría hacerlo?

Ejercicio 5.

a. ¿De cuántas formas se puede colorear una bandera de cuatro franjas horizontales con cinco colores?

b. Idem a la parte **a**. con la restricción de que el color de la primer y última franja sean distintos.

Ejercicio 6. ¿Cuántos números naturales pares de tres dígitos distintos (en base diez), existen?

Ejercicio 7. ¿Cuántas palabras distintas pueden construirse (con o sin sentido), usando todas las letras de la palabra ASALAS?

Ejercicio 8. ¿De cuántas maneras diferentes puede un Rey, desplazarse desde la esquina inferior izquierda (a1) hasta la esquina superior derecha (h8) de un tablero de ajedrez, admitiendo únicamente movimientos hacia arriba o hacia la derecha (no se permite movimiento en diagonal)?

Ejercicio 9. (Ej. 1 del examen de diciembre de 2016)

a. ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de SKYWALKER que empiecen en vocal y no contengan la secuencia RL?

b. ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de SKYWALKER que empiecen en vocal y no contengan la secuencia RK?

9. a. $8! - 7! = 8 \cdot 7! - 7!$

$= 7!\,(8 - 1) = 7! \cdot 7$

palabras que empiezan en vocal

= # palabras ... que tiene RL +

" que no tienen RL

$8! = 2 \cdot \frac{8!}{2!} = 2 \cdot \frac{7!}{2!}$ + # ... sin RL

b. # palabras que ... vocal

= # ... tienen RK + # ... no tienen RK

$2 \cdot \frac{8!}{2!} = 2 \cdot 7!$ + # ...

↳ letras posibles: si empiezo en A

S K Y W L (RK) E

no hay repeticiones ahora

palabras ... no tienen RK

$= 8! - 2 \cdot 7! = 7! \cdot 8 - 2 \cdot 7!$

$= 7! \cdot 6$

Ejercicio 10. Un comité de 10 personas será elegido entre 8 hombres y 8 mujeres. De cuántas formas se puede hacer una selección si

a. No hay restricciones.

b. Debe haber 5 hombres y 5 mujeres.

c. Deben haber más mujeres que hombres.

d. Deben haber al menos 7 hombres.

Ejercicio 11. ¿De cuántas formas puede un jugador extraer 5 cartas de una baraja común (de 48 cartas) y obtener:

a. cinco cartas del mismo palo,

b. cuatro ases,

c. cuatro cartas del mismo valor,

d. tres ases y dos sotas,

e. tres ases y un par?

Combinaciones: es similar a las permutaciones, pero ahora no nos importa el orden.

Ejemplo: Dado un mazo de cartas de truco tiene 40 cartas. A la hora de repartir es lo mismo que me den

$\boxed{1E, 2P, 3C}$

2P, 1E, 3C

ó 3C, 1P, 1E

¿Cuántas manos (3 cartas) podemos armar?

Si importara el orden hay $P(40,3) = 3! \cdot \#$ de manos

$$\Rightarrow \# \text{ de manos} = \frac{P(40,3)}{3!} = \frac{40!}{3!\,(40-3)!} = C(40,3)$$

Def: $C(n,k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

la cantidad de combinaciones de n elementos tomados de a k.

Permutaciones — importa el orden

Combinaciones — no importa el orden!

Ejercicio 10. Un comité de 10 personas será elegido entre 8 hombres y 8 mujeres. De cuántas formas se puede hacer una selección si

a. No hay restricciones.

b. Debe haber 5 hombres y 5 mujeres.

c. Deben haber más mujeres que hombres.

d. Deben haber al menos 7 hombres.

a. No importa el orden a la hora de contar ⇒ hay que elegir 10 personas de 16 (= 8+8)

$\Rightarrow \#\text{formas} = C(16,10)$

$$= \frac{16!}{10!(16-10)!} = \frac{16!}{10!\,6!} = 8008$$

b. $C(8,5)\cdot C(8,5) = \dfrac{(8!)^2}{(5!)^2\cdot(3!)^2} = 3136$

↳ primero elijo 5 mujeres de 8

↳ luego los hombres.

c. Puedo elegir 6 mujeres y 4 H

ó 7 M y 3 H

ó 8 M y 2 H

$$\boxed{\begin{aligned} & C(8,6)\cdot C(8,4) \\ + & C(8,7)\cdot C(8,3) \\ + & C(8,8)\cdot C(8,2) \end{aligned}}$$

PRÁCTICO 3: Combinatoria II

Ejercicio 1.

(a) ¿Cuántas fichas diferentes hay en el juego popular del dominó?

(b) ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al arrojar 3 dados idénticos?

Ejercicio 2. Un comité de 12 personas debe elegir de entre sus miembros un presidente, un secretario, y un tesorero. ¿De cuántas formas puede hacerse esto?

Ejercicio 3. ¿De cuántas formas es posible hacer una partición de un conjunto de $2n$ elementos, en n conjuntos de 2 elementos?

Ejercicio 4. Considerar la suma: $\sum_{i=0}^{i=n} C_m^i$.

a. Calcular la suma para algunos casos, usando el triángulo de Pascal.
Aclaración: si $i < m$ asumimos $C_m^i = 0$.

b. Conjeture cuánto suma en general y demuéstrelo por Inducción Completa.

Ejercicio 5. Hallar la cantidad de maneras de distribuir r pelotas idénticas en n cajas diferentes.

Ejercicio 6.

(a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 personas en 12 sillas puestas en línea?

(b) Ídem pero las personas no deben quedar sentadas en asientos contiguos.

Ejercicio 7. ¿De cuántas formas puede distribuir un maestro 8 bizcochos de chocolate y 7 de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

Ejercicio 8. Usando que $(1 + x)^n(1 + x)^n = (1 + x)^{2n}$, probar que:

$$\sum_{i=0}^{i=n} (C_i^n)^2 = C_n^{2n}.$$

Ejercicio 4. Considerar la suma: $\sum_{i=0}^{i=n} C_m^i$.

a. Calcular la suma para algunos casos, usando el triángulo de Pascal.
Aclaración: si $i < m$ asumimos $C_m^i = 0$.

b. Conjeture cuánto suma en general y demuéstrelo por Inducción Completa.

Triangulo de Pascal:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccl}
 & & & & & & 1 & & & & & & & & n=0 \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & n=1 \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & n=2 \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & n=3 \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & n=4 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & n=5 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & n=6
\end{array}
$$

$$C_0^2 + C_1^2 = C_1^3$$

$$\boxed{C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}}$$

Ejercicio probar esa igualdad.

$$C_4^6 = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

$$C_0^0 = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$$

$$C_0^1 = \frac{1!}{0!\,1!} = 1, \quad C_1^1 = 1$$

$$C_0^2 = \frac{2!}{2!\,0!} = 1, \quad C_1^2 = \frac{2!}{1!\,1!} = 2, \quad C_2^2 = 1$$

$$C_0^3 = 1, \quad C_1^3 = 3, \quad C_2^3 = 3, \quad C_3^3 = 1$$

La fila n-ésima del triangulo de Pascal me da los números $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!}$$

__Def__:

si $n \geq k \geq 0$

$$C^n_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

si $0 \leq n < k \Rightarrow \boxed{C^n_k = 0}$

$$\sum_{i=0}^{i=n} C^i_m$$

Vamos a ver cuanto da eso para algunos m y n.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

$n=0,\ m=0$

$$\sum_{i=0}^{0} C^i_0 = 1$$

$1+3+6+10 = 20$

$$C^1_2 + C^2_2 + C^3_2 + C^4_2 + C^5_2 = 20 = C^6_3$$

m \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	2	3	4	5	6
1	0	1	3	6	10	15	21
2	0	0	1	4	10	20	35
3	0	0	0	1	5	15	35
4	0	0	0	0	1	6	21

← n

↑ m

$$C^i_0 = \frac{i!}{0!\,(i-0)!} = \frac{i!}{i!} = 1$$

$$\sum_{i=0}^{1} C^i_0 = 1$$

$$\sum_{i=0}^{2} C^i_0 = 1+1$$

$$\sum_{i=0}^{n} C^i_1 = \underbrace{C^0_1}_{=0} + C^1_1 + \dots + C^n_1$$

$$= \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = C^n_2$$

$$C^i_1 = \frac{i!}{1!\,(i-1)!} = i$$

$m = 2$, $n = 2$

$$\sum_{i=0}^{2} C_2^i = C_2^0 + C_2^1 + C_2^2$$

$$= 0 + 0 + \frac{2!}{2!\,0!} = 1$$

$m=2, n=3$, $$\sum_{i=0}^{3} C_2^i = C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 + C_2^3$$

$$= 0 + 0 + 1 + 3 = 4$$

$m=2$, $n=\cancel{4}$

$$\sum_{i=0}^{5} C_2^i = C_3^6$$

n

m

b.

Conjetura: $$\sum_{i=0}^{n} C_m^i = C_{m+1}^{n+1}$$

cuando $\boxed{n \geq m}$

si no da 0

Tenemos que probarlo por inducción, pero depende de 2 variables.

Entonces, podemos fijar una variable y probarlo para la otra y eso lo demostraría en general. ¡Pensarlo en turismo!