Universidad de la República | **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística | **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 5: Combinatoria IV

Principio de Inclusión-Exclusión - Funciones sobreyectivas - Desórdenes, etc.

Ejercicio 1. Probar las siguientes identidades, conocidas como las fórmulas de Stifel para Combinaciones, Funciones Sobreyectivas y Números de Stirling:

(a) **Combinaciones** $C_n^m + C_{n+1}^m = C_{n+1}^{m+1}$. → ya lo vimos aplicar fórmula

(b) **Funciones Sobreyectivas** $Sob(m+1,n) = n(Sob(m,n-1) + Sob(m,n))$.

(c) **Números de Stirling** $S(m+1,n) = S(m,n-1) + nS(m,n)$.

Ejercicio 2. Probar las siguientes identidades usando la regla de la suma y del producto:

(a) $n^m = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m,i)$.

(b) $Sob(m,n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} Sob(m-i,n-1)$.

(c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{N-k}{n-i} = \binom{N}{n}$, siendo $k \leq n \leq N$.

(d) $n! = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$, donde $d_0 = 1$ y d_k es el número de desórdenes de tamaño k.

Ejercicio 3.

(a) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 105 inclusive no son múltiplos de 3, 5 ni 7?

(b) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 1155 inclusive son múltiplos de 3 pero no de 5, 7 ni 11?

Ejercicio 4. Se tira un dado 6 veces. Calcular la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado. Tomar en cuenta el orden de los valores obtenidos en el dado.
Por ejemplo, los resultados en orden $(6,6,2,2,1,1)$ y $(6,2,6,2,1,1)$ cuentan a favor como casos diferentes.

Ejercicio 5. ¿De cuántas formas pueden extraerse 9 canicas de una bolsa si hay 3 de cada uno de los siguientes colores: blanco, rojo, azul, negro?

Ejercicio 6. ¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 9.999.999 inclusive cumplen que la suma de sus dígitos es igual a 31?

Ejercicio 7. Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ con las siguientes restricciones:

(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo i.

(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

(c) $0 < x_1 \leq 4$, $1 < x_2 < 5$, $3 \leq x_3 \leq 7$ y $0 \leq x_4 \leq 8$.

Ejercicio 8. Hallar la cantidad de permutaciones de los dígitos de 123456789 tales que:

(a) Ningún dígito está en su posición original.

(b) Los dígitos pares no están en su posición original.

(c) Los dígitos pares no están en su posición original y los primeros cuatro dígitos son precisamente 1, 2, 3 y 4, en algún orden.

Ejercicio 9. Seis perros y dos gatos tienen cuatro escondites para guarecerse de la lluvia. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los ocho animales en los cuatro escondites sabiendo que se utilizan todos los escondites y además no pueden haber perros y gatos en el mismo escondite?

Ejercicio 10. (Ej. 1 parte a. del 1^{er} parcial del 2000)
Halle la cantidad de palabras distintas que pueden obtenerse permuntando las letras de

MOMENTÁNEAMENTE

si la primer letra debe ser O. ¿Y si la primera letra tuviera que ser M u O?

Ejercicio 11. ¿De cuántas maneras se puede particionar un conjunto de 6 elementos en subconjuntos de cardinal 3, 2 y 1 respectivamente? ¿Y si todos los subconjuntos tienen cardinal 2?

(a) **Combinaciones** $C_n^m + C_{n+1}^m = C_{n+1}^{m+1}$. → ? aplicar formula

(b) **Funciones Sobreyectivas** $Sob(m+1,n) = n(Sob(m,n-1) + Sob(m,n))$.

(c) **Números de Stirling** $S(m+1,n) = S(m,n-1) + nS(m,n)$.

a) Aplicar las fórmulas

b) $$Sob(m,n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_i^n (n-i)^m$$

$$Sob(m+1,n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_i^n (n-i)^{m+1}$$

$$Sob(m,n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_i^{n-1} (n-1-i)^m$$

$$C_0^n n^{m+1} - C_1^n \cdot (n-1)^{m+1} + C_2^n (n-2)^{m+1} \dots + (-1)^n C_n^n (n-n)^{m+1}$$

$$\overset{?}{=} n\Big(C_0^{n-1} (n-1)^m - C_1^{n-1} (n-2)^m \dots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} 0^m$$

$$\dots \Big)$$

Probar la igualdad usando la fórmula parece ser complicado. Hay que usar un argumento combinatorio.

Vamos a ver que la parte (c) implica (b).

$$S(x,y) = Sob(x,y)/y!$$

asumo que vale

$$S(m+1,n) = S(m,n-1) + n \cdot S(m,n)$$

$$\frac{Sob(m+1,n)}{n!} = \frac{Sob(m,n-1)}{(n-1)!} + n\,\frac{Sob(m,n)}{n!}$$

multiplico por $n!$

implica

$\hookrightarrow$ $Sob(m+1,n) = n\,(Sob(m,n-1) + Sob(m,n))$.

Vamos a probar c.

(c) $S(x,y) = \#$ maneras de dist. x objetos distintos en y cajas indistinguibles y que ninguna quede vacía.

si tengo una dist. de $m+1$ obj.

en n cajas donde ninguna está vacía

tengo 2 posibilidades: 1. $m+1$ está solo en la caja

2. $m+1$ está con otro elemento en una caja.

Si está solo, corresponde a distribuir m objetos en $(n-1)$ cajas con ninguna vacía

si está acompañado es lo mismo que primero distribuir m elementos en n cajas y luego colocar el $m+1$ en alguna de las cajas, y tengo n cajas

entonces por la regla de la suma tenemos $S(m+1,n) = S(m,n-1) + n\,S(m,n)$.

Ejercicio 3.

(a) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 105 inclusive no son múltiplos de 3, 5 ni 7?

(b) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 1155 inclusive son múltiplos de 3 pero no de 5, 7 ni 11?

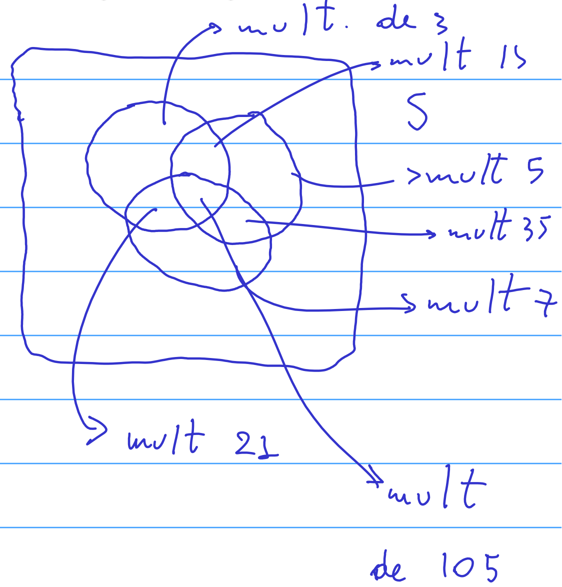
a. Usamos PIE

$S = \{1, 2, \dots, 105\}$

c_1 : 3 divide a n

c_2 : 5 " a n

c_3 : 7 " a n



divide

$$N(c_1) = \#\{n \in S : 3 \mid n\}$$

$$= \frac{105}{3} = 35$$

$$N(c_2) = \#\{n \in S : 5 \mid n\} = \frac{105}{5} = 21$$

$$N(c_3) = \frac{105}{7} = 15$$

$$N(c_1 c_2) = \#\{n \in S : 3 \mid n, 5 \mid n\} = \frac{105}{3 \cdot 5} = 7$$

$$N(c_1 c_3) = \frac{105}{3 \cdot 7} = 5 \quad , \quad \underline{N(c_2 c_3) = 3}$$

$$N(c_1 c_2 c_3) = 1 \quad , \quad \overline{N} = \#\{\text{no son mult de } 3, 5 \text{ y } 7\}$$

$$= \#S - [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3)] + [N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + N(c_2 c_3)] - N(c_1 c_2 c_3)$$

$$= 105 - [35 + 21 + 15] + [3 + 5 + 7] - 1$$

$$= 48$$

```
[1,
 2,
 4,
 8,
 11,
 13,
 16,
 17,
 19,
 22,
 23,
 26,
 29,
 31,
 32,
 34,
 37,
 38,
 41,
 43,
 44,
 46,
 47,
 52,
 53,
 58,
 59,
 61,
 62,
 64,
 67,
 68,
 71,
 73,
 74,
 76,
 79,
 82,
 83,
 86,
 88,
 89,
 92,
 94,
 97,
 101,
 103,
 104]
```

Ejercicio 4. Se tira un dado 6 veces. Calcular la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado. Tomar en cuenta el orden de los valores obtenidos en el dado.
Por ejemplo, los resultados en orden $(6,6,2,2,1,1)$ y $(6,2,6,2,1,1)$ cuentan a favor como casos diferentes.

Christian dice de plantear

$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = r \rightarrow \boxed{18 | r}$

donde x_i es el valor de la tirada i-ésima

$\rightarrow \boxed{1 \leq x_i \leq 6}$ $\rightarrow 6 \leq r \leq 36 = 6 \cdot 6$

r es múltiplo de 18 y $6 \leq r \leq 36 \Rightarrow r = 18$ ó $r = 36$

si $r = 36$ hay un solo caso: $x_i = 6$

Queda para resolver $x_1 + \cdots + x_6 = 18$

$1 \leq x_i \leq 6$

$1-1 \leq x_i - 1 \leq 6-1$

Resolvamos esto último:

Primero hacemos un cambio de variable

$y_i = x_i - 1 \Rightarrow$ $0 \leq y_i \leq 5$

$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 18$

$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \cdots + (x_6 - 1) = 18 - 6 = 12$

$y_1 + \cdots + y_6 = 12$

Cambiamos el problema $x_1+\cdots+x_6=18$
$1\leq x_i\leq 6$

por $y_1+\cdots+y_6=12$
$0\leq y_i\leq 5$

Queremos un conjunto S y ciertas condiciones para poder usar PIE.

$S=\{$ soluciones de $y_1+\cdots+y_6=12$, $\underbrace{y_i\in\mathbb{N}}_{y_i\geq 0}\}$

C_i: las soluciones en S / $y_i>5 \Leftrightarrow y_i\geq 6$

$N(C_i)=\#S(C_i)=\#\{$ las sols en S / $y_i\geq 6\}$

$=CR(6,6)=C(6+6-1,6)=C(11,6)$.

↳ cant de vars

$N(C_iC_j)=\#S(C_iC_j)=\#\{$ las sols en S/ $y_i\geq 6$, $y_j\geq 6\}$

$\underline{i<j}$

$=CR(6,0)=C(6-1,0)$
$=1$

$N(C_iC_jC_k)=\#\{$ las sols en S / $y_i\geq 6$, $y_j\geq 6$, $y_k\geq 6\}$

$=\#\emptyset=0$, ...

N de 3 o más condiciones es 0.

hay $C(6,2)$ sumandos

$$\bar{N} = \# S - [N(c_1) + \cdots + N(c_6)]$$

$$+ [N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + \cdots + N(c_5 c_6)]$$

lo que queremos hallar

$$= CR(6,12) - 6\,CR(6,6) + C(6,2)$$

$$= C(17,12) - 6\,C(11,6) + C(6,2)$$

$$= 6188 - 6 \cdot 462 + 15$$

$$= 3431 \qquad 3432$$

En total tenemos $\overbrace{3431 + 1}^{3432}$ soluciones

$x_1 + \cdots + x_6 = 18$ $\qquad$ $x_1 + \cdots + x_6 = 36$

$1 \leq x_i \leq 6$ $\qquad$ $1 \leq x_i \leq 6$.

Ejercicio 6. ¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 9.999.999 inclusive cumplen que la suma de sus dígitos es igual a 31?

$$x = \sum_{i=0}^{D} d_i \cdot 10^i \qquad d_i \in \{0,1,\ldots,9\},\ d_D \neq 0$$

son los dígitos de x y $(D+1)$ la cant. de dígitos.

$x = 123$, $\quad x = 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2$

$d_0 = 3,\ d_1 = 2,\ d_2 = 1$

Si $1 \leq x \leq 9\,999\,999$ como mucho tengo 7 cifras

$$x = \sum_{i=0}^{7} d_i\, 10^i, \qquad \text{donde queremos}$$

$d_1 + d_2 + \cdots + d_7 = 31$ $\qquad$ $S = \{$ sols. de $d_1 + \cdots + d_7 = 31,\ d_i \in \mathbb{N}\}$

$0 \leq d_i \leq 9$ $\qquad$ $c_i : d_i > 9 \iff d_i \geq 10$

Terminarlo usando la misma idea que antes.

Ejercicio 7. Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ con las siguientes restricciones:

(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo i.

(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

(c) $0 < x_1 \leq 4$, $1 < x_2 < 5$, $3 \leq x_3 \leq 7$ y $0 \leq x_4 \leq 8$.

c.
$$0 < x_1 \leqslant 4 \iff 1 \leqslant x_1 \leqslant 4 \iff 0 \leqslant x_1 - 1 \leqslant 3$$
$$1 < x_2 < 5 \iff 2 \leqslant x_2 \leqslant 4 \iff 0 \leqslant x_2 - 2 \leqslant 2$$
$$3 \leqslant x_3 \leqslant 7 \iff 0 \leqslant x_3 - 3 \leqslant 4$$
$$0 \leqslant x_4 \leqslant 8$$

$$y_1 = x_1 - 1, \quad y_2 = x_2 - 2, \quad y_3 = x_3 - 3, \quad y_4 = x_4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 2) + (x_3 - 3) + x_4 = 19 - 1 - 2 - 3$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13$$

$$y_i \in \mathbb{N} \,/\, \quad y_1 \leqslant 3, \; y_2 \leqslant 2, \; y_3 \leqslant 4, \; y_4 \leqslant 8$$

$S = \{$sols. de $y_1 + \cdots + y_4 = 13$, $y_i \in \mathbb{N}\}$

c_1: sol de S / $y_1 > 3 \iff y_1 \geqslant 4$

c_2: " " " / $y_2 \geqslant 3$

c_3: " " " / $y_3 \geqslant 5$

c_4: " " " / $y_4 \geqslant 9$

$\overline{N} = \#\{$sols de S que no cumplen$\}$

$$= \#S - [N(c_1) + \cdots + N(c_4)]$$
$$+ [N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + \cdots + N(c_3 c_4)]$$
$$- [N(c_1 c_2 c_3) + \cdots + N(c_2 c_3 c_4)]$$
$$+ N(c_1 c_2 c_3 c_4)$$
$$= CR(4,13) - CR(4,9) - \cdots - CR(4,4) + CR(4,4) + \cdots + CR(4,1) - CR(4,1)$$

$N(C_1) = \#\{$ Sols de $\quad y_1+y_2+y_3+y_4 = 13$
$\quad y_1 \geq 4,\ y_i \in \mathbb{N}\}$

$= CR(4, 13-4) = CR(4, 9)$

$N(C_2) = CR(4, 13-3) = CR(\cancel{4, 10})$

$N(C_3) = CR(4, 13-5) = CR(4, 8)$

$N(C_4) = CR(4, 13-9) = CR(4, 4)$

$N(C_1C_2) = CR(4, 13-4-3) = CR(4, 6)$

$N(C_1C_3) = CR(4, 13-4-5) = CR(4, 4)$

$N(C_1C_4) = CR(4, 13-4-9) = CR(4, 0)$

$N(C_2C_3) = CR(4, 13-3-5) = CR(4, 5)$

$N(C_2C_4) = CR(4, 13-3-9) = CR(4, 1)$

$N(C_3C_4) = CR(4, 13-5-9) = 0$

$N(C_1C_2C_3) = CR(4, 13-4-3-5) = CR(4, 1)$

$N(C_1C_2C_4) = 0$

$N(C_1C_3C_4) = 0$

$N(C_2C_3C_4) = 0$

$N(C_1C_2C_3C_4) = 0$

Ejercicio 8. Hallar la cantidad de permutaciones de los dígitos de 123456789 tales que:

(a) Ningún dígito está en su posición original.

(b) Los dígitos pares no están en su posición original.

(c) Los dígitos pares no están en su posición original y los primeros cuatro dígitos son precisamente 1, 2, 3 y 4, en algún orden. → regla del producto.

a. desarreglos

$S = \{$ permutaciones de $12\cdots 9\}$

$N = \# S = 9!$

C_i : el dígito i-ésimo está en su posición original

$N(C_i) = \#\{\text{perm. tal que } i \text{ quede fijo}\}$
$= 8!$

$N(C_i C_j) = 7!$, $N(C_i C_j C_k) = 6!$ ...

$\bar{N} = 9! - [N(C_1) + \cdots + N(C_9)] + [N(C_1 C_2) + \cdots + N(C_8 C_9)]$
↳ lo que queremos calcular

$- [N(C_1 C_2 C_3) + \cdots + N(C_7 C_8 C_9)] + \cdots$

$= 9! - 9 \cdot 8! + C(9,2)\, 7! - C(9,3)\, 6! + \cdots$

$= \sum_{i=0}^{9} (-1)^i C_i^9 (9-i)!$

$= \sum_{i=0}^{9} (-1)^i \frac{9!}{i!} = d_9$ ← desarreglos de tamaño 9.

b. $S = \{\text{perm de } 1 \ldots 9\}$ $\quad \# S = 9!$

C_1 : 2 queda fijo
C_2 : 4 " "
C_3 : 6 " "
C_4 : 8 " "

$N(C_i) = 8!$
$N(C_i C_j) = 7!$
$N(C_i C_j C_k) = 6!$
$N(C_1 C_2 C_3 C_4) = 5!$

$\bar{N} = 9! - 4 \cdot 8! + C(4,2)\, 7! - C(4,3)\, 6! + 5!$

$= \sum_{i=0}^{4} (-1)^i C_i^4 (9-i)!$