Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 4: Combinatoria III

.

Ejercicio 1. En una playa se juntan 13 chicos y deciden hacer 4 equipos para jugar al voleibol, para ello hacer tres equipos de 3 jugadores y uno de 4. Entre los chicos se encuentra uno sumamente habilidoso y otro que es de madera, los restantes 11 jugadores son intermedios. Para equiparar, al habilidoso lo colocan en uno de los equipos de 3 jugadores y al de madera en el equipo de 4 jugadores.
¿De cuántas formas se pueden armar los equipos?

Ejercicio 2. Para una selección de fútbol, fueron convocados 2 goleros, 6 zagueros, 7 mediocampistas y 4 atacantes. ¿De cuántos modos es posible formar una selección con un golero, 4 zagueros, 4 mediocampistas y 2 atacantes?

Ejercicio 3.

(a) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$.

(b) ¿Cuántas soluciones hay si se reemplaza el signo $=$ por el signo $<$?
O sea: hallar la cantidad de soluciones naturales de la inecuación $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 < 4$.

(c) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ tal que se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones $x_1 \geq 3$ y $x_4 \geq 3$.

Ejercicio 4.

a. Hallar la cantidad de subconjuntos de un conjunto con n elementos razonando con la fórmula del binomio.

b. Probar que: $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \, C_j^n = 0$.

c. (Ej. 4 del 1^{er} parcial del 2000) Hallar el valor de la siguiente suma: $\displaystyle\sum_{k=0}^{203} C_k^{203} \, (-4)^k$.

Ejercicio 5.

(a) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de $(x^5 + x - 1)^{10}$.

(b) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio $(2x + 4y + 2z + 5)^{14}$.

Ejercicio 6. (Ej. 4 del 2^{do} examen del curso 2001)
Hallar la cantidad n de palabras de 1 a 5 letras que se pueden formar usando las letras de la palabra *CASAS*. (Por ejemplo *C* y *AA* son dos palabras posibles, pero *CAC* no lo es).

Ejercicio 7. (Ej. 2 del 1^{er} parcial del curso 2009)
¿Cuántas palabras de longitud 6 existen que no tengan dos consonantes o dos vocales juntas?

Ejercicio 8. Dados $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, m\}$, hallar la cantidad de funciones $f : A \to B$ tales que:

(a) No hay restricciones.

(b) f es inyectiva.

(c) f es biyectiva

(d) f es monótona creciente estrictamente.

(e) f es monótona creciente.

(f) Cada elemento $i \in B$ es alcanzado r_i veces, donde $r_1 + \ldots + r_m = n$.

Ejercicio 9.

a. Para n y t positivos, repasar la demostración (hay al menos dos posibles demostraciones) que el coeficiente de $x_1^{n_1}\ x_2^{n_2} \ldots x_t^{n_t}$ en $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$ es

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_t!}$$

con $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$.

b. (Ej. 3 del 1^{er} parcial del 2001) Determinar el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $\left(x^3 - x^2 + x - 1\right)^6$.

c. (Ej. 1b del 1^{er} parcial 2018 sem. impar) Hallar el coeficiente de x^6 en $(2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5)^5$.

Ejercicio 3.

(a) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$.

(b) ¿Cuántas soluciones hay si se reemplaza el signo $=$ por el signo $<$?
O sea: hallar la cantidad de soluciones naturales de la inecuación $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 < 4$.

(c) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ tal que se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones $x_1 \geq 3$ y $x_4 \geq 3$.

a. $CR(7,4) = C(7+4-1, 4) = C(10,4)$

$\downarrow$ cant de vars

$$= \frac{10!}{6!\,4!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4!}$$

$$= \frac{7\cdot \cancel{8}\cdot \cancel{9}^{3}\cdot 10}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}} = 210$$

b. Podemos aplicar regla de la suma y considerar

$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 0 \to CR(7,0) = C(7-1,0) = 1$

$x_1 + \cdots + x_7 = 1 \to CR(7,1) = C(7,1) = 7$

$x_1 + \cdots + x_7 = 2 \to CR(7,2) = C(8,2) = 7\cdot 4$

$x_1 + \cdots + x_7 = 3 \to CR(7,3) = C(9,3) = \frac{7\cdot \cancel{8}^{4}\cdot \cancel{9}^{3}}{\cancel{6}} = 7\cdot 4\cdot 3$

En total hay $1 + 7 + 7\cdot 4 + 7\cdot 4\cdot 3$

Hallemos los sols de

$x_1 + \cdots + x_7 = r$ con $r = 0, 1, 2, 3$

si consideremos $\underline{x_8} = 3 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_7)$

$\Rightarrow x_8 \geq 0$

Es lo mismo hallar soluciones

de $x_1 + \cdots + x_7 + x_8 = 3$

y la cantidad es $\boxed{CR(8,3) = \sum_{i=0}^{3} CR(7,i)}$

$n=7,\ r=3$

En general vale

$$\sum_{i=0}^{r} CR(n,i) = CR(n+1,r)$$

Ejercicio 5.

(a) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de $(x^5+x-1)^{10}$.

(b) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio $(2x+4y+2z+5)^{14}$.

Teo del multinomio:

Para n y t positivos, repasar la demostración (hay al menos dos posibles demostraciones) que el coeficiente de $x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$ en $(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n$ es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_t!}$$

con $n_1+n_2+\cdots+n_t=n$.

5.a. $\boxed{x_1 = x^5,\quad x_2 = x,\quad x_3 = -1}$ suponemos eso

$$(x^5+x-1)^{10} = (x_1+x_2+x_3)^{10}$$

$$= x_1^{10} + x_1^9 \cdot x_2 \cdot \frac{10!}{9!} + \cdots + x_1^2 x_2^3 \cdot x_3^5 \left(\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 5!}\right) + \cdots$$

¿De qué maneras puede aparecer x^5 como

$\boxed{x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdot x_3^{n_3} \quad \text{con} \quad n_1+n_2+n_3=10}$?

```
? (x^5+x-1)^10
%2 = x^50 + 10*x^46 - 10*x^45 + 45*x^42 - 90*x^41 + 45*x^40 + 120*x^38 - 360*x^37 + 360*x^36 - 120*x^35 + 210*x^34 - 840*x^33 + 1260*x^32 - 840*x^31 + 462*x^30 - 1260*x^29 + 2520*x^
28 - 2520*x^27 + 1470*x^26 - 1512*x^25 + 3150*x^24 - 4200*x^23 + 3270*x^22 - 2100*x^21 + 2730*x^20 - 4200*x^19 + 4245*x^18 - 2880*x^17 + 2100*x^16 - 2640*x^15 + 3160*x^14 - 2610*x^1
3 + 1620*x^12 - 1200*x^11 + 1306*x^10 - 1270*x^9 + 885*x^8 - 480*x^7 + 300*x^6 - 262*x^5 + 210*x^4 - 120*x^3 + 45*x^2 - 10*x + 1
```

```
? (x1+x2+x3)^10
%1 = x1^10 + (10*x2 + 10*x3)*x1^9 + (45*x2^2 + 90*x3*x2 + 45*x3^2)*x1^8 + (120*x2^3 + 360*x3*x2^2 + 360*x3^2*x2 + 120*x3^3)*x1^7 + (210*x2^4 + 840*x3*x2^3 + 1260*x3^2*x2^2 + 840*x3^
3*x2 + 210*x3^4)*x1^6 + (252*x2^5 + 1260*x3*x2^4 + 2520*x3^2*x2^3 + 2520*x3^3*x2^2 + 1260*x3^4*x2 + 252*x3^5)*x1^5 + (210*x2^6 + 1260*x3*x2^5 + 3150*x3^2*x2^4 + 4200*x3^3*x2^3 + 315
0*x3^4*x2^2 + 1260*x3^5*x2 + 210*x3^6)*x1^4 + (120*x2^7 + 840*x3*x2^6 + 2520*x3^2*x2^5 + 4200*x3^3*x2^4 + 4200*x3^4*x2^3 + 2520*x3^5*x2^2 + 840*x3^6*x2 + 120*x3^7)*x1^3 + (45*x2^8 +
360*x3*x2^7 + 1260*x3^2*x2^6 + 2520*x3^3*x2^5 + 3150*x3^4*x2^4 + 2520*x3^5*x2^3 + 1260*x3^6*x2^2 + 360*x3^7*x2 + 45*x3^8)*x1^2 + (10*x2^9 + 90*x3*x2^8 + 360*x3^2*x2^7 + 840*x3^3*x2^
6 + 1260*x3^4*x2^5 + 1260*x3^5*x2^4 + 840*x3^6*x2^3 + 360*x3^7*x2^2 + 90*x3^8*x2 + 10*x3^9)*x1 + (x2^10 + 10*x3*x2^9 + 45*x3^2*x2^8 + 120*x3^3*x2^7 + 210*x3^4*x2^6 + 252*x3^5*x2^5 +
210*x3^6*x2^4 + 120*x3^7*x2^3 + 45*x3^8*x2^2 + 10*x3^9*x2 + x3^10)
```

$x_1 = x^5,\ x_2 = x,\ x_3 = -1$

$- x^5 = x_1^1 \cdot x_2^0 \cdot x_3^9$

$- x^5 = x_1^0 \cdot x_2^5 \cdot x_3^5$

el coeficiente que multiplica a $x_1^1 \cdot x_2^0 \cdot x_3^9$

$$\frac{10!}{1!\,0!\,9!} = 10$$

el coeficiente que multiplica a $x_1^0 \cdot x_2^5 \cdot x_3^5$

$$\frac{10!}{5!\,5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{5!} = \frac{\cancel{6}\cdot 7\cdot \cancel{8}^{2}\cdot 9\cdot \cancel{10}^{2}}{\cancel{6}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{5}} = 4\cdot 7\cdot 9 = 28\cdot 9 = 252$$

Entonces el coeficiente de x^5 tiene que ser $-10 - 252 = -262$

$$(x^5 + x - 1)^{10}$$

$$\square\, x^5 = (x^5)^{n_1} \cdot (x)^{n_2} \cdot (-1)^{n_3} = (-1)^{n_3} x^{(5 n_1 + n_2)}$$

$$\boxed{n_1 + n_2 + n_3 = 10}$$

$$\begin{cases} 5n_1 + n_2 = 5 \\ n_1 + n_2 + n_3 = 10 \end{cases} \qquad \boxed{n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}}$$

Como $n_1, n_2, n_3 \geq 0$ $\quad n_1 = 0$ ó $n_1 = 1$

Si $n_1 = 0 \Rightarrow n_2 = 5 \quad n_3 = 5$

Si $n_1 = 1 \Rightarrow n_2 = 0 \quad n_3 = 9$

Si queremos el coeficiente de x^{14} en el desarrollo de $(x^5+x-1)^{10}$

$\square\, x^{14} = (x^5)^{n_1} \cdot (x)^{n_2} (-1)^{n_3} = (-1)^{n_3} \cdot x^{5n_1+n_2}$

$\begin{cases} 5n_1+n_2 = 14 \\ n_1+n_2+n_3 = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} n_1=2,\ n_2=4,\ n_3=4 \\ n_1=1,\ n_2=9,\ n_3=0 \end{cases}$

El coef de $(x^5)^2 (x)^4 (-1)^4$

es $\dfrac{10!}{2!\,4!\,4!} = \dfrac{5\cdot\cancel{6}\cdot 7\cdot\cancel{8}^{2}\cdot 9\cdot\cancel{10}^{5}}{\cancel{2!}\,\cancel{4!}\,\cancel{4}} = 2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7 = 3150$

El coef de $(x^5)^1 (x)^9 (-1)^0$

$\dfrac{10!}{9!\,1!\,0!} = 10$

Entonces el coef de x^{14} es $3150 + 10 = \boxed{3160}$

(b) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio $(2x+4y+2z+5)^{14}$.

$(x_1+x_2+x_3+x_4)^{14}$

$x_1 = 2x,\ x_2 = 4y,\ x_3 = 2z,\ x_4 = 5$

$x_1^{n_1}\ x_2^{n_2}\cdot x_3^{n_3}\cdot x_4^{n_4} = (2x)^{n_1}\cdot(4y)^{n_2}(2z)^{n_3}(5)^{n_4}$

$n_1+n_2+n_3+n_4=14$

$= \boxed{2^{n_1}\cdot 4^{n_2}\cdot 2^{n_3}\cdot 5^{n_4}}\ x^{n_1}\cdot y^{n_2}\cdot z^{n_3}$

$= \square \cdot x\cdot y^3\cdot z^5$

Entonces $n_1 = 1,\ n_2 = 3,\ n_3 = 5,\ n_4 = 5$

El coef de $x_1^1\, x_2^3\, x_3^5\, x_4^5$ es $\dfrac{14!}{3!\,5!\,5!}$

```
? (x1+x2+x3+x4)^14
%3 = x1^14 + (14*x2 + (14*x3 + 14*x4))*x1^13 + (91*x2^2 + (182*x3 + 182*x4)*x2 + (91*x3^2 + 182*x4*x3 + 91*x4^2))*x1^12 + (364*x2^3 + (1092*x3 + 1092*x4)*x2^2 + (1092*x3^2 + 2184*x4*x3 + 1092*x4^2)*x2 + (364*x3^3 + 1092*x4*x3^2
+ 1092*x4^2*x3 + 364*x4^3))*x1^11 + (1001*x2^4 + (4004*x3 + 4004*x4)*x2^3 + (6006*x3^2 + 12012*x4*x3 + 6006*x4^2)*x2^2 + (4004*x3^3 + 12012*x4*x3^2 + 12012*x4^2*x3 + 4004*x4^3)*x2 + (1001*x3^4 + 4004*x4*x3^3 + 6006*x4^2*x3^2 + 4
004*x4^3*x3 + 1001*x4^4))*x1^10 + (2002*x2^5 + (10010*x3 + 10010*x4)*x2^4 + (20020*x3^2 + 40040*x4*x3 + 20020*x4^2)*x2^3 + (20020*x3^3 + 60060*x4*x3^2 + 60060*x4^2*x3 + 20020*x4^3)*x2^2 + (10010*x3^4 + 40040*x4*x3^3 + 60060*x4^2
*x3^2 + 40040*x4^3*x3 + 10010*x4^4)*x2 + (2002*x3^5 + 10010*x4*x3^4 + 20020*x4^2*x3^3 + 20020*x4^3*x3^2 + 10010*x4^4*x3 + 2002*x4^5))*x1^9 + (3003*x2^6 + (18018*x3 + 18018*x4)*x2^5 + (45045*x3^2 + 90090*x4*x3 + 45045*x4^2)*x2^4
+ (60060*x3^3 + 180180*x4*x3^2 + 180180*x4^2*x3 + 60060*x4^3)*x2^3 + (45045*x3^4 + 180180*x4*x3^3 + 270270*x4^2*x3^2 + 180180*x4^3*x3 + 45045*x4^4)*x2^2 + (18018*x3^5 + 90090*x4*x3^4 + 180180*x4^2*x3^3 + 180180*x4^3*x3^2 + 90090
*x4^4*x3 + 18018*x4^5)*x2 + (3003*x3^6 + 18018*x4*x3^5 + 45045*x4^2*x3^4 + 60060*x4^3*x3^3 + 45045*x4^4*x3^2 + 18018*x4^5*x3 + 3003*x4^6))*x1^8 + (3432*x2^7 + (24024*x3 + 24024*x4)*x2^6 + (72072*x3^2 + 144144*x4*x3 + 72072*x4^2)
*x2^5 + (120120*x3^3 + 360360*x4*x3^2 + 360360*x4^2*x3 + 120120*x4^3)*x2^4 + (120120*x3^4 + 480480*x4*x3^3 + 720720*x4^2*x3^2 + 480480*x4^3*x3 + 120120*x4^4)*x2^3 + (72072*x3^5 + 360360*x4*x3^4 + 720720*x4^2*x3^3 + 720720*x4^3*x
3^2 + 360360*x4^4*x3 + 72072*x4^5)*x2^2 + (24024*x3^6 + 144144*x4*x3^5 + 360360*x4^2*x3^4 + 480480*x4^3*x3^3 + 360360*x4^4*x3^2 + 144144*x4^5*x3 + 24024*x4^6)*x2 + (3432*x3^7 + 24024*x4*x3^6 + 72072*x4^2*x3^5 + 120120*x4^3*x3^4
+ 120120*x4^4*x3^3 + 72072*x4^5*x3^2 + 24024*x4^6*x3 + 3432*x4^7))*x1^7 + (3003*x2^8 + (24024*x3 + 24024*x4)*x2^7 + (84084*x3^2 + 168168*x4*x3 + 84084*x4^2)*x2^6 + (168168*x3^3 + 504504*x4*x3^2 + 504504*x4^2*x3 + 168168*x4^3)*x2
^5 + (210210*x3^4 + 840840*x4*x3^3 + 1261260*x4^2*x3^2 + 840840*x4^3*x3 + 210210*x4^4)*x2^4 + (168168*x3^5 + 840840*x4*x3^4 + 1681680*x4^2*x3^3 + 1681680*x4^3*x3^2 + 840840*x4^4*x3 + 168168*x4^5)*x2^3 + (84084*x3^6 + 504504*x4*x
3^5 + 1261260*x4^2*x3^4 + 1681680*x4^3*x3^3 + 1261260*x4^4*x3^2 + 504504*x4^5*x3 + 84084*x4^6)*x2^2 + (24024*x3^7 + 168168*x4*x3^6 + 504504*x4^2*x3^5 + 840840*x4^3*x3^4 + 840840*x4^4*x3^3 + 504504*x4^5*x3^2 + 168168*x4^6*x3 + 24
024*x4^7)*x2 + (3003*x3^8 + 24024*x4*x3^7 + 84084*x4^2*x3^6 + 168168*x4^3*x3^5 + 210210*x4^4*x3^4 + 168168*x4^5*x3^3 + 84084*x4^6*x3^2 + 24024*x4^7*x3 + 3003*x4^8))*x1^6 + (2002*x2^9 + (18018*x3 + 18018*x4)*x2^8 + (72072*x3^2 +
144144*x4*x3 + 72072*x4^2)*x2^7 + (168168*x3^3 + 504504*x4*x3^2 + 504504*x4^2*x3 + 168168*x4^3)*x2^6 + (252252*x3^4 + 1009008*x4*x3^3 + 1513512*x4^2*x3^2 + 1009008*x4^3*x3 + 252252*x4^4)*x2^5 + (252252*x3^5 + 1261260*x4*x3^4 + 2
522520*x4^2*x3^3 + 2522520*x4^3*x3^2 + 1261260*x4^4*x3 + 252252*x4^5)*x2^4 + (168168*x3^6 + 1009008*x4*x3^5 + 2522520*x4^2*x3^4 + 3363360*x4^3*x3^3 + 2522520*x4^4*x3^2 + 1009008*x4^5*x3 + 168168*x4^6)*x2^3 + (72072*x3^7 + 504504
*x4*x3^6 + 1513512*x4^2*x3^5 + 2522520*x4^3*x3^4 + 2522520*x4^4*x3^3 + 1513512*x4^5*x3^2 + 504504*x4^6*x3 + 72072*x4^7)*x2^2 + (18018*x3^8 + 144144*x4*x3^7 + 504504*x4^2*x3^6 + 1009008*x4^3*x3^5 + 1261260*x4^4*x3^4 + 1009008*x4^
5*x3^3 + 504504*x4^6*x3^2 + 144144*x4^7*x3 + 18018*x4^8)*x2 + (2002*x3^9 + 18018*x4*x3^8 + 72072*x4^2*x3^7 + 168168*x4^3*x3^6 + 252252*x4^4*x3^5 + 252252*x4^5*x3^4 + 168168*x4^6*x3^3 + 72072*x4^7*x3^2 + 18018*x4^8*x3 + 2002*x4^
9))*x1^5 + (1001*x2^10 + (10010*x3 + 10010*x4)*x2^9 + (45045*x3^2 + 90090*x4*x3 + 45045*x4^2)*x2^8 + (120120*x3^3 + 360360*x4*x3^2 + 360360*x4^2*x3 + 120120*x4^3)*x2^7 + (210210*x3^4 + 840840*x4*x3^3 + 1261260*x4^2*x3^2 + 840840
*x4^3*x3 + 210210*x4^4)*x2^6 + (252252*x3^5 + 1261260*x4*x3^4 + 2522520*x4^2*x3^3 + 2522520*x4^3*x3^2 + 1261260*x4^4*x3 + 252252*x4^5)*x2^5 + (210210*x3^6 + 1261260*x4*x3^5 + 3153150*x4^2*x3^4 + 4204200*x4^3*x3^3 + 3153150*x4^4*
x3^2 + 1261260*x4^5*x3 + 210210*x4^6)*x2^4 + (120120*x3^7 + 840840*x4*x3^6 + 2522520*x4^2*x3^5 + 4204200*x4^3*x3^4 + 4204200*x4^4*x3^3 + 2522520*x4^5*x3^2 + 840840*x4^6*x3 + 120120*x4^7)*x2^3 + (45045*x3^8 + 360360*x4*x3^7 + 126
1260*x4^2*x3^6 + 2522520*x4^3*x3^5 + 3153150*x4^4*x3^4 + 2522520*x4^5*x3^3 + 1261260*x4^6*x3^2 + 360360*x4^7*x3 + 45045*x4^8)*x2^2 + (10010*x3^9 + 90090*x4*x3^8 + 360360*x4^2*x3^7 + 840840*x4^3*x3^6 + 1261260*x4^4*x3^5 + 1261260
*x4^5*x3^4 + 840840*x4^6*x3^3 + 360360*x4^7*x3^2 + 90090*x4^8*x3 + 10010*x4^9)*x2 + (1001*x3^10 + 10010*x4*x3^9 + 45045*x4^2*x3^8 + 120120*x4^3*x3^7 + 210210*x4^4*x3^6 + 252252*x4^5*x3^5 + 210210*x4^6*x3^4 + 120120*x4^7*x3^3 + 4
5045*x4^8*x3^2 + 10010*x4^9*x3 + 1001*x4^10))*x1^4 + (364*x2^11 + (4004*x3 + 4004*x4)*x2^10 + (20020*x3^2 + 40040*x4*x3 + 20020*x4^2)*x2^9 + (60060*x3^3 + 180180*x4*x3^2 + 180180*x4^2*x3 + 60060*x4^3)*x2^8 + (120120*x3^4 + 48048
0*x4*x3^3 + 720720*x4^2*x3^2 + 480480*x4^3*x3 + 120120*x4^4)*x2^7 + (168168*x3^5 + 840840*x4*x3^4 + 1681680*x4^2*x3^3 + 1681680*x4^3*x3^2 + 840840*x4^4*x3 + 168168*x4^5)*x2^6 + (168168*x3^6 + 1009008*x4*x3^5 + 2522520*x4^2*x3^4
+ 3363360*x4^3*x3^3 + 2522520*x4^4*x3^2 + 1009008*x4^5*x3 + 168168*x4^6)*x2^5 + (120120*x3^7 + 840840*x4*x3^6 + 2522520*x4^2*x3^5 + 4204200*x4^3*x3^4 + 4204200*x4^4*x3^3 + 2522520*x4^5*x3^2 + 840840*x4^6*x3 + 120120*x4^7)*x2^4 +
(60060*x3^8 + 480480*x4*x3^7 + 1681680*x4^2*x3^6 + 3363360*x4^3*x3^5 + 4204200*x4^4*x3^4 + 3363360*x4^5*x3^3 + 1681680*x4^6*x3^2 + 480480*x4^7*x3 + 60060*x4^8)*x2^3 + (20020*x3^9 + 180180*x4*x3^8 + 720720*x4^2*x3^7 + 1681680*x4^
3*x3^6 + 2522520*x4^4*x3^5 + 2522520*x4^5*x3^4 + 1681680*x4^6*x3^3 + 720720*x4^7*x3^2 + 180180*x4^8*x3 + 20020*x4^9)*x2^2 + (4004*x3^10 + 40040*x4*x3^9 + 180180*x4^2*x3^8 + 480480*x4^3*x3^7 + 840840*x4^4*x3^6 + 1009008*x4^5*x3^5
+ 840840*x4^6*x3^4 + 480480*x4^7*x3^3 + 180180*x4^8*x3^2 + 40040*x4^9*x3 + 4004*x4^10)*x2 + (364*x3^11 + 4004*x4*x3^10 + 20020*x4^2*x3^9 + 60060*x4^3*x3^8 + 120120*x4^4*x3^7 + 168168*x4^5*x3^6 + 168168*x4^6*x3^5 + 120120*x4^7*x3
^4 + 60060*x4^8*x3^3 + 20020*x4^9*x3^2 + 4004*x4^10*x3 + 364*x4^11))*x1^3 + (91*x2^12 + (1092*x3 + 1092*x4)*x2^11 + (6006*x3^2 + 12012*x4*x3 + 6006*x4^2)*x2^10 + (20020*x3^3 + 60060*x4*x3^2 + 60060*x4^2*x3 + 20020*x4^3)*x2^9 +
(45045*x3^4 + 180180*x4*x3^3 + 270270*x4^2*x3^2 + 180180*x4^3*x3 + 45045*x4^4)*x2^8 + (72072*x3^5 + 360360*x4*x3^4 + 720720*x4^2*x3^3 + 720720*x4^3*x3^2 + 360360*x4^4*x3 + 72072*x4^5)*x2^7 + (84084*x3^6 + 504504*x4*x3^5 + 126126
0*x4^2*x3^4 + 1681680*x4^3*x3^3 + 1261260*x4^4*x3^2 + 504504*x4^5*x3 + 84084*x4^6)*x2^6 + (72072*x3^7 + 504504*x4*x3^6 + 1513512*x4^2*x3^5 + 2522520*x4^3*x3^4 + 2522520*x4^4*x3^3 + 1513512*x4^5*x3^2 + 504504*x4^6*x3 + 72072*x4^
7)*x2^5 + (45045*x3^8 + 360360*x4*x3^7 + 1261260*x4^2*x3^6 + 2522520*x4^3*x3^5 + 3153150*x4^4*x3^4 + 2522520*x4^5*x3^3 + 1261260*x4^6*x3^2 + 360360*x4^7*x3 + 45045*x4^8)*x2^4 + (20020*x3^9 + 180180*x4*x3^8 + 720720*x4^2*x3^7 + 1
681680*x4^3*x3^6 + 2522520*x4^4*x3^5 + 2522520*x4^5*x3^4 + 1681680*x4^6*x3^3 + 720720*x4^7*x3^2 + 180180*x4^8*x3 + 20020*x4^9)*x2^3 + (6006*x3^10 + 60060*x4*x3^9 + 270270*x4^2*x3^8 + 720720*x4^3*x3^7 + 1261260*x4^4*x3^6 + 151351
2*x4^5*x3^5 + 1261260*x4^6*x3^4 + 720720*x4^7*x3^3 + 270270*x4^8*x3^2 + 60060*x4^9*x3 + 6006*x4^10)*x2^2 + (1092*x3^11 + 12012*x4*x3^10 + 60060*x4^2*x3^9 + 180180*x4^3*x3^8 + 360360*x4^4*x3^7 + 504504*x4^5*x3^6 + 504504*x4^6*x3^
5 + 360360*x4^7*x3^4 + 180180*x4^8*x3^3 + 60060*x4^9*x3^2 + 12012*x4^10*x3 + 1092*x4^11)*x2 + (91*x3^12 + 1092*x4*x3^11 + 6006*x4^2*x3^10 + 20020*x4^3*x3^9 + 45045*x4^4*x3^8 + 72072*x4^5*x3^7 + 84084*x4^6*x3^6 + 72072*x4^7*x3^5
+ 45045*x4^8*x3^4 + 20020*x4^9*x3^3 + 6006*x4^10*x3^2 + 1092*x4^11*x3 + 91*x4^12))*x1^2 + (14*x2^13 + (182*x3 + 182*x4)*x2^12 + (1092*x3^2 + 2184*x4*x3 + 1092*x4^2)*x2^11 + (4004*x3^3 + 12012*x4*x3^2 + 12012*x4^2*x3 + 4004*x4^3)
*x2^10 + (10010*x3^4 + 40040*x4*x3^3 + 60060*x4^2*x3^2 + 40040*x4^3*x3 + 10010*x4^4)*x2^9 + (18018*x3^5 + 90090*x4*x3^4 + 180180*x4^2*x3^3 + 180180*x4^3*x3^2 + 90090*x4^4*x3 + 18018*x4^5)*x2^8 + (24024*x3^6 + 144144*x4*x3^5 + 36
0360*x4^2*x3^4 + 480480*x4^3*x3^3 + 360360*x4^4*x3^2 + 144144*x4^5*x3 + 24024*x4^6)*x2^7 + (24024*x3^7 + 168168*x4*x3^6 + 504504*x4^2*x3^5 + 840840*x4^3*x3^4 + 840840*x4^4*x3^3 + 504504*x4^5*x3^2 + 168168*x4^6*x3 + 24024*x4^7)*x
2^6 + (18018*x3^8 + 144144*x4*x3^7 + 504504*x4^2*x3^6 + 1009008*x4^3*x3^5 + 1261260*x4^4*x3^4 + 1009008*x4^5*x3^3 + 504504*x4^6*x3^2 + 144144*x4^7*x3 + 18018*x4^8)*x2^5 + (10010*x3^9 + 90090*x4*x3^8 + 360360*x4^2*x3^7 + 840840*x
4^3*x3^6 + 1261260*x4^4*x3^5 + 1261260*x4^5*x3^4 + 840840*x4^6*x3^3 + 360360*x4^7*x3^2 + 90090*x4^8*x3 + 10010*x4^9)*x2^4 + (4004*x3^10 + 40040*x4*x3^9 + 180180*x4^2*x3^8 + 480480*x4^3*x3^7 + 840840*x4^4*x3^6 + 1009008*x4^5*x3^5
+ 840840*x4^6*x3^4 + 480480*x4^7*x3^3 + 180180*x4^8*x3^2 + 40040*x4^9*x3 + 4004*x4^10)*x2^3 + (1092*x3^11 + 12012*x4*x3^10 + 60060*x4^2*x3^9 + 180180*x4^3*x3^8 + 360360*x4^4*x3^7 + 504504*x4^5*x3^6 + 504504*x4^6*x3^5 + 360360*x4
^7*x3^4 + 180180*x4^8*x3^3 + 60060*x4^9*x3^2 + 12012*x4^10*x3 + 1092*x4^11)*x2^2 + (182*x3^12 + 2184*x4*x3^11 + 12012*x4^2*x3^10 + 40040*x4^3*x3^9 + 90090*x4^4*x3^8 + 144144*x4^5*x3^7 + 168168*x4^6*x3^6 + 144144*x4^7*x3^5 + 9009
0*x4^8*x3^4 + 40040*x4^9*x3^3 + 12012*x4^10*x3^2 + 2184*x4^11*x3 + 182*x4^12)*x2 + (14*x3^13 + 182*x4*x3^12 + 1092*x4^2*x3^11 + 4004*x4^3*x3^10 + 10010*x4^4*x3^9 + 18018*x4^5*x3^8 + 24024*x4^6*x3^7 + 24024*x4^7*x3^6 + 18018*x4^8
*x3^5 + 10010*x4^9*x3^4 + 4004*x4^10*x3^3 + 1092*x4^11*x3^2 + 182*x4^12*x3 + 14*x4^13))*x1 + (x2^14 + (14*x3 + 14*x4)*x2^13 + (91*x3^2 + 182*x4*x3 + 91*x4^2)*x2^12 + (364*x3^3 + 1092*x4*x3^2 + 1092*x4^2*x3 + 364*x4^3)*x2^11 + (1
001*x3^4 + 4004*x4*x3^3 + 6006*x4^2*x3^2 + 4004*x4^3*x3 + 1001*x4^4)*x2^10 + (2002*x3^5 + 10010*x4*x3^4 + 20020*x4^2*x3^3 + 20020*x4^3*x3^2 + 10010*x4^4*x3 + 2002*x4^5)*x2^9 + (3003*x3^6 + 18018*x4*x3^5 + 45045*x4^2*x3^4 + 60060
*x4^3*x3^3 + 45045*x4^4*x3^2 + 18018*x4^5*x3 + 3003*x4^6)*x2^8 + (3432*x3^7 + 24024*x4*x3^6 + 72072*x4^2*x3^5 + 120120*x4^3*x3^4 + 120120*x4^4*x3^3 + 72072*x4^5*x3^2 + 24024*x4^6*x3 + 3432*x4^7)*x2^7 + (3003*x3^8 + 24024*x4*x3^7
+ 84084*x4^2*x3^6 + 168168*x4^3*x3^5 + 210210*x4^4*x3^4 + 168168*x4^5*x3^3 + 84084*x4^6*x3^2 + 24024*x4^7*x3 + 3003*x4^8)*x2^6 + (2002*x3^9 + 18018*x4*x3^8 + 72072*x4^2*x3^7 + 168168*x4^3*x3^6 + 252252*x4^4*x3^5 + 252252*x4^5*x3
^4 + 168168*x4^6*x3^3 + 72072*x4^7*x3^2 + 18018*x4^8*x3 + 2002*x4^9)*x2^5 + (1001*x3^10 + 10010*x4*x3^9 + 45045*x4^2*x3^8 + 120120*x4^3*x3^7 + 210210*x4^4*x3^6 + 252252*x4^5*x3^5 + 210210*x4^6*x3^4 + 120120*x4^7*x3^3 + 45045*x4^
8*x3^2 + 10010*x4^9*x3 + 1001*x4^10)*x2^4 + (364*x3^11 + 4004*x4*x3^10 + 20020*x4^2*x3^9 + 60060*x4^3*x3^8 + 120120*x4^4*x3^7 + 168168*x4^5*x3^6 + 168168*x4^6*x3^5 + 120120*x4^7*x3^4 + 60060*x4^8*x3^3 + 20020*x4^9*x3^2 + 4004*x4
^10*x3 + 364*x4^11)*x2^3 + (91*x3^12 + 1092*x4*x3^11 + 6006*x4^2*x3^10 + 20020*x4^3*x3^9 + 45045*x4^4*x3^8 + 72072*x4^5*x3^7 + 84084*x4^6*x3^6 + 72072*x4^7*x3^5 + 45045*x4^8*x3^4 + 20020*x4^9*x3^3 + 6006*x4^10*x3^2 + 1092*x4^11*
x3 + 91*x4^12)*x2^2 + (14*x3^13 + 182*x4*x3^12 + 1092*x4^2*x3^11 + 4004*x4^3*x3^10 + 10010*x4^4*x3^9 + 18018*x4^5*x3^8 + 24024*x4^6*x3^7 + 24024*x4^7*x3^6 + 18018*x4^8*x3^5 + 10010*x4^9*x3^4 + 4004*x4^10*x3^3 + 1092*x4^11*x3^2 +
182*x4^12*x3 + 14*x4^13)*x2 + (x3^14 + 14*x4*x3^13 + 91*x4^2*x3^12 + 364*x4^3*x3^11 + 1001*x4^4*x3^10 + 2002*x4^5*x3^9 + 3003*x4^6*x3^8 + 3432*x4^7*x3^7 + 3003*x4^8*x3^6 + 2002*x4^9*x3^5 + 1001*x4^10*x3^4 + 364*x4^11*x3^3 + 91*x
4^12*x3^2 + 14*x4^13*x3 + x4^14))
```

$\Rightarrow$ el coef de $x y^3 z^5$

es $\dfrac{14!}{3!\,5!\,5!} \cdot 2 \cdot 4^3 \cdot 2^5 \cdot 5^5 = \boxed{2^{12} \cdot 5^5 \cdot \dfrac{14!}{3!\,5!\,5!}}$

Ejercicio 6. (Ej. 4 del 2^{do} examen del curso 2001)
Hallar la cantidad n de palabras de 1 a 5 letras que se pueden formar usando las letras de la palabra *CASAS*. (Por ejemplo *C* y *AA* son dos palabras posibles, pero *CAC* no lo es).

Regla de la suma

$n=1$, 3 palabras C, A, S

$n=2$, 8 palabras CA, CS, AA, AC, AS
SS, SA, SC

$n=3$, ? " Permutaciones de
CAS, CAA, CSS, AAS, SSA

$n=4$, ? " $3! + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!}$

$n=5$ $\frac{5!}{2!\,2!}$

permutaciones de
CASA, CASS, AASS
$\frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!\,2!}$

$$3+8+6+4\cdot\frac{3!}{2!}+2\cdot\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!\,2!}+\frac{5!}{2!\,2!}$$

Ejercicio 8. Dados $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, m\}$, hallar la cantidad de funciones $f : A \to B$ tales que:

(a) No hay restricciones.

(b) f es inyectiva.

(c) f es biyectiva

(d) f es monótona creciente estrictamente.

(e) f es monótona creciente.

(f) Cada elemento $i \in B$ es alcanzado r_i veces, donde $r_1 + \ldots + r_m = n$.

8.

a. • $f(1) \in B$ y puede tomar m valores distintos

• Una vez elegido $f(1)$, $f(2)$ puede tomar m valores distintos (pq no hay restricciones)

• una vez elegidos $f(1), f(2)$, $f(3)$ puede tomar m valores distintos (pq no hay restricciones).

⋮

• una vez elegidos $f(1), f(2), \ldots, f(n-1)$, entonces $f(n)$ puede tomar m valores distintos

Por la regla del producto tenemos

$\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdots m}_{n\text{-veces}} = m^n = \#B^{\#A}$ funciones $f: A \to B$

b. Recordamos la definición.

$f: A \to B$ es inyectiva si

$\forall\ a, a' \in A$ tq $f(a) \neq f(a') \to a \neq a'$.

• podemos elegir $f(\underline{1})$ de $m-0$ maneras distintas

• una vez elegido $f(1)$, $f(\underline{2})$ puede tomar $m-1$ valores distintos ya que no puede ser igual a $f(1)$

. una vez elegido $f(1)$ y $f(2)$, entonces $f(3)$ puede tomar $m-2$ valores posibles ya que no puede ser igual a $f(1)$ ni a $f(2)$!

⋮

. una vez elegidos $f(1), f(2), \dots, f(n-1)$, entonces $f(n)$ puede tomar $m-(n-1)$ valores posibles

si $\boxed{n > m}$ esto no tiene sentido entonces no hay funciones inyectivas de A en B.

si $n \leq m$ por la regla del producto hay $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-(n-1))$

$$= \frac{m!}{(m-n)!} = P(m,n)$$

$$= P(\#B, \#A).$$

$$\#\{f : \{1,2,\dots,n\} \to \{1,\dots,m\} \text{ tq } f \text{ es inyectiva}\}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n > m \\ P(m,n) & \text{si } n \leq m. \end{cases}$$

c. $\#\{f : \{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,m\} : f \text{ biyectiva}\}$

<u>Def</u>: $f : A \to B$ es una función sobreyectiva si $\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A$ tq $f(a) = b$.

<u>Def</u>: $f : A \to B$ es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

<u>Obs</u>: . si $f : A \to B$ inyectiva $\Rightarrow \#A \leq \#B$

. si $f : A \to B$ sobreyectiva $\Rightarrow \#A \geq \#B$

- si $f: A \to B$ es biyectiva
$\Rightarrow \underline{\#A = \#B}$

Def: Si $f: A \to B$, $\operatorname{Im}(f) = \{f(a) : a \in A\}$
$\subset B$.

Ejemplos: $A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \operatorname{Im}(f) = \{1, 2, 4\} \\ \#\operatorname{Im}(f) = 3 = \#A \end{array}$$

Obs: Si $f: A \to B$ es inyectiva
entonces $\#\operatorname{Im}(f) = \#A$
$\operatorname{Im}(f) = \{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\}$

Además, si $f: A \to B$ inyectiva
y $\#A = \#B \Rightarrow$ es sobreyectiva

$\underbrace{\#B = \#A = \#\operatorname{Im}(f)}$
$\hookrightarrow$ inyectiva

| $\operatorname{Im}(f) \subset B$
| $\#\operatorname{Im}(f) \leq \#B$

$\to \#\operatorname{Im}(f) = \#B$
$\Rightarrow \operatorname{Im}(f) = B$ y
es sobreyectiva.

Si $X \subset Y$
X, Y conjuntos
finitos
$\Rightarrow \#X \leq \#Y$

Conclusión: Si tengo $f: A \to B$ y $\#A = \#B$
entonces f es biyectiva.

Entonces $f: \{1, \ldots, \boxed{n}\} \to \{1, \ldots, \boxed{n}\}$ es inyectiva
sii es biyectiva

$$\#\{f:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,m\} : f \text{ biyectiva}\}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n!}{(m-n)!} & \text{si } n=m \\ 0 & \text{si } n\neq m\end{cases} = \begin{cases} \boxed{n!} & \text{si } n=m \\ 0 & \text{si } n\neq m\end{cases}$$

(d) f es monótona creciente estrictamente. $f: A \to B$ y $A\subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$

Def: f es monótona creciente / decreciente

si $f(a) \geq f(a')$ ($\leq$) cuando $a \geq a'$ $\quad a, a' \in A$

. f es monótona creciente / decreciente estrictamente

si $f(a) > f(a')$ ($<$) cuando $a > a'$.

Ejemplos: . $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5\}$

$f(1)=3$, $f(2)=3$

$f(3)=4$, $f(4)=5$ es creciente

no es estrictamente creciente

ya que $\underline{2>1}$ pero $\underline{f(2)\not> f(1)}$

$a=2$, $a'=1$ $\quad a\geq a'$

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=3 \\ f(a')=3 \end{array}\right\} \quad f(a)\geq f(a') \checkmark$$

. $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=4$, $f(4)=5$

es estrictamente creciente.

. $f(1)=3$, $f(2)=4$ ó 5,

$f(3)=5$, $f(4)=$ ✗

no hay función estr. creciente.

Si es estrictamente creciente
$\Rightarrow$ es inyectiva.

Si $\boxed{a \neq a'}$ tengo dos opciones:

$a < a' \rightsquigarrow f(a) < f(a') \rightsquigarrow \boxed{f(a) \neq f(a')}$

$a' < a \rightsquigarrow f(a') < f(a) \rightsquigarrow \boxed{f(a') \neq f(a')}$

Si $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ es estrictamente creciente $\Rightarrow$ es inyectiva $\Rightarrow \boxed{n \leq m}$

si $n > m \Rightarrow$ no hay $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ estrictamente creciente.

- si $n = m$, $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ estr. creciente $\Rightarrow f(1) = 1, f(2) = 2, \dots, f(n) = n$
  hay una sola función de ese tipo

- si $\underline{n = 2,\ m = 3}$

  encontramos 3 funciones

  1 $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 3 \end{cases}$ 3 $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 3 \end{cases}$

1: X X _ $\longleftrightarrow$ $f(1) = 1,\ f(2) = 2$
2: _ X X $\longleftrightarrow$ $f(1) = 2,\ f(2) = 3$
3: X _ X $\longleftrightarrow$ $f(1) = 1,\ f(2) = 3$

- si $n = 3$, $m = 4$, hay ___ funciones estrictamente crecientes

$f(1) = 1$
$f(2) = 2$
$f(3) = 3$

$\leftarrow$ X X X _ | X _ X X
X X _ X | _ X X X

$$1 \leq f(1) < f(2) < f(3) \leq 4$$

$f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$

$Im(f) = \{1, 2, 3\}$

$f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$

$Im(f) = \{1, 2, 4\}$

Dado un conjunto A de 3 elementos en $\{1, 2, 3, 4\}$ existe una única función $f: \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ creciente estricta tal que $Im(f) = A$.

$A \subset \{1, 2, 3, 4\}$, $\boxed{A = \{2, 1, 4\}}$

$= \{1, 2, 4\}$

defino $f: \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$

$f(1) = 1$

$f(2) = 2$

$f(3) = 4$

Cada función $f: \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ estrictamente creciente corresponde a un conjunto $A \subset \{1, 2, 3, 4\}$ con $\#A = 3$.

Entonces la cantidad de funciones $f: \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ estr. crecientes es la cantidad de subconjuntos de 3 elementos de $\{1, 2, 3, 4\}$ o sea $C(4, 3)$.

Más en general, cada función $f: \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ (con $n \leq m$) estr. creciente corresponde de manera única a un subconjunto de n elementos de $\{1,2,\dots,m\}$, entonces hay $C(m,n)$ funciones estr. crecientes.

(e) f es monótona creciente.

Es diferente a lo anterior porque no necesariamente las funciones crecientes son estrictamente crecientes.

Ejemplos: $n=1$, $m=1$ hay una sola función que es creciente

$n=1$, $m\geq 1$ hay m funciones crecientes

$n=2$, $m=2$, hay 4 funciones en total

1era	$f(1)=1$, $f(2)=1$	✓	creciente
2da	$f(1)=1$, $f(2)=2$	✓	creciente
3era	$f(1)=2$, $f(2)=1$	✗	no creciente
4ta	$f(1)=2$, $f(2)=2$	✓	creciente

$C^3_2 = 3$ posibles

$n=2$, $m=3$

$6 = C(3,2) = \underline{CR(2,3)}$

$$3\begin{cases} f(1)=1, & f(2)=1 \\ f(1)=1, & f(2)=2 \\ f(1)=1, & f(2)=3 \end{cases} \quad \begin{matrix} Im(f)=\{1\} \\ Im(f)=\{1,2\} \\ Im(f)=\{1,3\} \end{matrix}$$

$$2\begin{cases} f(1)=2, & f(2)=2 \\ f(1)=2, & f(2)=3 \end{cases} \quad \begin{matrix} Im(f)=\{2\} \\ Im(f)=\{2,3\} \end{matrix}$$

$$1\ \{\ f(1)=3, \quad f(2)=3 \qquad Im(f)=\{3\}$$

$n=2$, $m=4$ $\quad 4+3+2+1=10 = C^5_2 = \underline{CR(2,4)}$

Si $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$

$Im(f)=\{1,2\}$ y f creciente

¿quién es f?

Una posibilidad es $\boxed{\begin{array}{l} f(1)=1 \\ f(2)=2 \\ f(3)=2 \end{array}}$ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ | $x_3 = 0$, $x_4 = 0$

$x_1+x_2+x_3+x_4=3$

otra posibilidad es $f(1)=1$, $f(2)=1$, $f(3)=2$ $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ | $x_3 = 0$, $x_4 = 0$

$x_1+x_2+x_3+x_4=3$

Dada una función creciente $f:\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$

$x_1 = \#\{i \in \{1,2,3\} : f(i) = 1\}$

$x_2 = \#\{i \in \{1,2,3\} : f(i) = 2\}$

$x_3 = \#\{i \in \{1,2,3\} : f(i) = 3\}$

$x_4 = \#\{i \in \{1,2,3\} : f(i) = 4\}$

$x_1+x_2+x_3+x_4 = 3$

Cualquier función f creciente me da una solución de $x_1+x_2+x_3+x_4=3$

Si tengo una solución de $x_1+x_2+x_3+x_4=3$, $x_i \geq 0$.
puedo construir una única $f:\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$ creciente.

Por ejemplo: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$

$f(1) = 2$

$f(2) = 4$

$f(3) = 4$

La cantidad de funciones crecientes $f:\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$ es la cantidad de soluciones de $x_1+x_2+x_3+x_4=3$

$$CR(3,4) = C(4+3-1,4) = C(6,4) = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$$

En general dada una solución

de $x_1 + \cdots + x_m = n$, $x_i \in \mathbb{N}$

me define una única función creciente

$f: \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$

entonces hay $CR(n, m)$

¿m puede ser más chico que n?
puede pasar y tiene sentido.

En el parlamento se precisa conformar una comisión de 13 personas y hay 9 mujeres y 9 hombres disponibles para conformarla.

¿De cuántas maneras podemos conformar la comisión si queremos que tenga más mujeres que hombres?

- a. Por la regla del producto podemos elegir 7 mujeres y 6 hombres de $C(9,7) \cdot C(9,6)$ maneras.

  Por la regla del producto podemos elegir 8 mujeres y 5 hombres de $C(9,8) \cdot C(9,5)$ maneras.

  Por la regla del producto podemos elegir 9 mujeres y 4 hombres de $C(9,9) \cdot C(9,4)$ maneras.

  Por la regla de la suma la solución es $C(9,7) \cdot C(9,6) + C(9,8) \cdot C(9,5) + C(9,9) \cdot C(9,4)$.

  ✓

- b. Tiene que haber al menos 7 mujeres, entonces primero elegimos 7 entre las 9 posibles. Tenemos $C(9,7)$ maneras de hacer esto.

  Luego elegimos 6 entre las 11 personas restantes, hay $C(11,6)$ maneras de hacer esto.

  Por la regla del producto, tenemos $C(9,7) \cdot C(11,6)$ maneras de conformar la comisión.

- X c. Alcanza con elegir 7 mujeres, asegurándonos cumplir la restricción del problema, y esto lo podemos hacer de $C(9,7)$ maneras.

$11 = 9 + 9 - 7 = 18 - 7$

> cuento varias veces lo mismo

Ej: • primero elijo las primeras 7 M y luego elijo la 8 y 9 M y luego los primeros 4 H

• primero elijo las últimos 7 M y luego las 1, 2 M y los primeros 4 H

¿Cuántos números pares de 4 dígitos con todos sus dígitos distintos hay?

Aclaración: Para que un número tenga 4 dígitos tiene que ser de la forma $d_1d_2d_3d_4$ con $d_1 \neq 0$, por ejemplo 1234 es un número de 4 dígitos, pero $0234 = 234$ no lo es.

- a. Si $d_4 = 0$ tenemos 9 opciones para d_1, porque no puedo usar 0 para d_1. Una vez elegido d_1 tenemos 8 opciones para d_2. Una vez elegido d_2 tenemos 7 opciones para d_3. Por la regla del producto tenemos $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ números pares de 4 dígitos con todos sus dígitos distintos que terminan en 0.

  Si $d_4 \neq 0$ tenemos 4 opciones para d_4. Una vez elegido d_4 tenemos 8 opciones para d_1. Una vez elegido d_1 tenemos 8 opciones para d_2. Una vez elegido d_2 tenemos 7 opciones para d_3.Por la regla del producto tenemos $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 1792$ números pares de 4 dígitos con todos sus dígitos distintos que no terminan en 0.

  Por la regla de la suma tenemos $504 + 1792$ números pares de 4 dígitos tal que todos sus dígitos son todos distintos.

- b. Tenemos 9 opciones para d_1, porque no puedo considerar el 0. Una vez elegido d_1 tengo 9 opciones para d_2. Una vez elegido d_2 tengo 8 opciones para d_3. Una vez elegido d_3 tengo 5 opciones para d_4, porque solo puedo elegir pares. Por la regla del producto tenemos $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5 = 3240$ números pares de 4 dígitos con todos sus dígitos distintos.

- c. Primero contamos todos los números de 4 dígitos con todos sus dígitos distintos y luego dividiremos entre dos esa cantidad.

  Tenemos 9 opciones para d_1, porque no puedo considerar el 0. Una vez elegido d_1 tenemos 9 opciones para d_2. Una vez elegido d_2 tenemos 8 opciones para d_3. Una vez elegido d_3 tenemos 7 opciones para d_4. Por la regla del producto tenemos $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$, números de 4 dígitos tal que sus dígitos son distintos.

  Finalmente, como solo queremos los números pares dividimos entre 2 la cantidad calculada antes. Entonces tenemos $4536/2 = 2268$ números pares de 4 dígitos tal que todos sus dígitos son distintos.