Universidad de la República — **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística — **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 8
Relaciones de Recurrencia II

Ejercicio 1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se considera el número: $a_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

(a) Mostrar que a_n verifica una relación de recurrencia de orden 2, homogénea, a coeficientes constantes.
(b) Probar que a_n es un entero positivo para todo natural n.

Ejercicio 2. Hay n estudiantes formando una fila y cuando suena el silbato cada estudiante puede (no está obligado) intercambiar de lugar con su compañero de adelante o de atrás (en caso de que los haya). ¿De cuántas formas diferentes pueden quedar esos n estudiantes luego de haber sonado el silbato?

Ejercicio 3. Respolver las relaciones de recurrencia:

(a) $c_{n+1} = c_n + n2^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $c_0 = 0$.
(b) $d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$, con $d_0 = d_{100} = 0$.
(c) $e_{n+1} = 2e_n + 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $e_0 = 0$.
(d) $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n \in \mathbb{N}$, con $f_0 = f_1 = 1$.

$a_n = \alpha \cdot 2^n + 3n2^n$

$\alpha = 1 \Rightarrow a_n = 2^n + 3 \cdot n \cdot 2^n$

Ejercicio 4. (Primer Parcial 2009) $a_{n+1} - 2a_n = 3 \cdot 2^{n+1} = 6 \cdot 2^n$
Si a_n verifica que $a_n - 2a_{n-1} = 3 \times 2^n$, con $a_0 = 1$, entonces:

(a) $a_{50} = 2^{50}$; (b) $a_{50} = 50 \times 2^{50}$; (c) $a_{50} = 150 \times 2^{50}$; $\boxed{\text{(d) } a_{50} = 151 \times 2^{50}}$.

$3n2^n$

$\cancel{3}n\cancel{2^n} - \cancel{2} \cdot \cancel{3}(n-1)\cancel{2^{n-1}} = \cancel{3} \cdot \cancel{2^n}$

$n - (n-1) = 1$ ✓

Ejercicio 5. (Parcial 2001)
Se considera la siguiente ecuación:

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 2^n, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

Hallar α, β y a_{100} sabiendo que: $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 1$ y $a_3 = 17$.

Ejercicio 6. (Examen Febrero 2009)
Para un campeonato de ajedrez se tiene una cantidad par de jugadores participantes. Se quiere armar la primera fecha (en una fecha todos los participantes juegan exactamente un partido). Sea a_k la cantidad de formas de armar la primera fecha de un campeonato con $2k$ jugadores.

(a) Calcular a_1, a_2, a_3.
(b) Deducir que $a_{k+1} = (2k+1) \times a_k$.
(c) Probar que $a_k = (2k-1) \times (2k-3) \times \ldots \times 3 \times 1$, para todo $k \geq 1$.

Ejercicio 1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se considera el número: $a_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

(a) Mostrar que a_n verifica una relación de recurrencia de orden 2, homogénea, a coeficientes constantes.

(b) Probar que a_n es un entero positivo para todo natural n.

1. $a_n = \varphi^n + \psi^n$ $\qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\varphi^2 = \varphi + 1$
$\psi^2 = \psi + 1$

φ y ψ son las raíces del polinomio $x^2 - x - 1$.

$a_{n+2} = \varphi^{n+2} + \psi^{n+2} = \varphi^2 \cdot \varphi^n + \psi^2 \psi^n$

$= (\varphi+1)\varphi^n + (\psi+1)\psi^n$

$= \varphi^{n+1} + \varphi^n + \psi^{n+1} + \psi^n$

$= (\varphi^{n+1} + \psi^{n+1}) + (\varphi^n + \psi^n) = a_{n+1} + a_n$.

b) $a_0 = \varphi^0 + \psi^0 = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{N}$ y positivo

$a_1 = \varphi + \psi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

a_0, a_1 son enteros positivos. Por inducción

a_{n+2} es entero positivo $\forall\ n \geq 0$

Ejercicio 3. Respolver las relaciones de recurrencia: → son no homogeneos

(a) $c_{n+1} = c_n + n2^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $c_0 = 0$.

(b) $d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, con $d_0 = d_{100} = 0$.

(c) $e_{n+1} = 2e_n + 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $e_0 = 0$.

(d) $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $n \in \mathbb{N}$, con $f_0 = f_1 = 1$.

grado 1 $\quad A\, a_{n+1} + B\, a_n = f(n)$

o

grado 2 $\quad A\, a_{n+2} + B\, a_{n+1} + C\, a_n = f(n)$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ no nula o sea

no es la función que da 0 siempre.

grado 1 homogeneas tiene solución gral

$$a_n = \alpha \cdot \left(-\frac{B}{A}\right)^n$$

y las de grado 2 homogeneas tienen

sol. gral

$a_n = \alpha \cdot r_1^n + \beta\, r_2^n$ si r_1, r_2 raíces $\neq$'s de $Ax^2+Bx+C=0$

o

$a_n = \alpha \cdot r^n + \beta\, n\, r^n$ si r raíz doble de $Ax^2+Bx+C=0$

$a_n = ?$ si $Ax^2+Bx+C=0$ no tiene raíces reales.

Para resolver la no homogenea primero hallemos la sol grel de la hom. $a_n^{(h)}$

y una particular de la recurrencia $a_n^{(p)}$

y la sol. general de $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

(a) $c_{n+1} = c_n + n2^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $c_0 = 0$.

la homogenea es $c_{n+1}^{(h)} = c_n^{(h)}$

la solución general es

$$C_n = \alpha \cdot 1^n = \alpha$$

	$a_n^{(p)}$
c, a constant	A, a constant
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$n^t, t \in \mathbf{Z}^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0$
$r^n, r \in \mathbf{R}$	Ar^n
$\sin \alpha n$	$A \sin \alpha n + B \cos \alpha n$
$\cos \alpha n$	$A \sin \alpha n + B \cos \alpha n$
$n^t r^n$	$r^n(A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0)$
$r^n \sin \alpha n$	$Ar^n \sin \alpha n + Br^n \cos \alpha n$
$r^n \cos \alpha n$	$Ar^n \sin \alpha n + Br^n \cos \alpha n$

En este caso $f(n) = n\cdot 2^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot n^1 2^n$

mirando la tabla $c_n^{(p)} = 2^n\cdot(an+b)$

Hay que hallar a y b para que $c_n^{(p)}$ cumpla la recurrencia. O sea

$$c_{n+1}^{(p)} = c_n^{(p)} + n\cdot 2^{n-1}$$

$$4\,\cancel{2^{n+1}}\cdot\left(a(n+1)+b\right) = 2^{\cancel{n}}\cdot(an+b) + n\cdot\cancel{2^{n-1}}$$

$$4an + 4a + 4b = 2an + 2b + n$$

$$n(2a+1) + (4a+2b) = 0 \quad \forall n$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2a+1=0 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+1=0 \\ 2a+b=0 \end{cases}$$

$\boxed{a = -1/2, \quad b = 1}$ la solución particular es $2^n(-n/2+1)$

la solución general de $c_n = c_n^{(h)} + c_n^{(p)}$

$$= \alpha + 2^n(-n/2+1)$$

$$C_0 = 0 = \alpha + 2^0\left(-0/2 + 1\right)$$

$$= \alpha + 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1$$

entonces $\quad C_n = -1 + 2^n\left(-n/2 + 1\right)$

(b) $\boxed{d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \text{ con } d_0 = d_{100} = 0.}$

$d_{1000} = ?$

$$\frac{1}{2} d_{n+2}^{(h)} - d_{n+1}^{(h)} + \frac{1}{2} d_n^{(h)} = 0$$

A B

$$d_{n+2}^{(h)} - 2 d_{n+1}^{(h)} + d_n^{(h)} = 0$$

C D

$x^2 - 2x + 1 = 0$ raiz doble 1

la solución de la homogenea

es $\quad d_n^{(h)} = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot n \cdot 1^n = \alpha + \beta n$.

$$\frac{1}{2} d_{n+2} - d_{n+1} + \frac{1}{2} d_n = \underset{= f(n)}{1} \quad \forall \; n \geq 0$$

Que pasa si usamos directamente

la tabla, $d_n^{(p)} = a$ cte

$$\frac{1}{2} a - a + \frac{1}{2} a = 1 \Rightarrow 0 = 1 \; \lightning$$

No funciona porque $f(n)$ es solución de la homogenea.

Si t es el mínimo natural tal que $n^t \cdot f(n)$ NO es solución de la homogenea $\Rightarrow$ $d_n^{(p)} = n^t \cdot$ lo que aparece en la tabla

En este caso $n \cdot f(n) = n$ es solución de la hom. pero $n^2 \cdot f(n) = n^2$ NO

$\Rightarrow t = 2$ y $d_n^{(p)} = a \cdot n^2$.

Falta ver que a me sirve: planteo

$$\frac{1}{2} d_{n+2}^{(p)} - d_{n+1}^{(p)} + \frac{1}{2} d_n^{(p)} = 1$$

$$\frac{1}{2} a (n+2)^2 - a (n+1)^2 + \frac{1}{2} a \cdot n^2 = 1$$

$$\frac{1}{2} a (n^2 + 4n + 4) - a (n^2 + 2n + 1) + \frac{1}{2} a n^2 = 1$$

$$n^2 \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) + n \cdot a \left(\frac{1}{2} \cdot 4 - 2\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4 - a = 1$$

$\boxed{a = 1}$ la particular es

$\boxed{d_n^{(p)} = n^2}$ entonces la

solución gral es $d_n = \alpha + \beta n + n^2$

Si $d_0 = d_{100} = 0$ $\quad 0 = d_0 = \alpha + \beta \cdot 0 + 0^2$

$= \alpha \quad \Rightarrow \alpha = 0$

$0 = d_{100} = \beta \cdot 100 + 100^2$

$\boxed{\beta = -100}$

$\boxed{d_n = n^2 - 100\, n}$

$d_{50} = 50^2 - 100 \cdot 50$

$= 50\,(50 - 100)$

$= -50^2 = -2500$

(c) $a_{n+1} = 2a_n + 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $a_0 = 0$.

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n = f(n)$$

ecuación característica es

$x - 2$ con raíz 2.

la solución general de la homogenea es

$$a_n^{(h)} = \alpha \cdot 2^n$$

Como $f(n)$ es solución de la homogenea

con $\alpha = 1$ tengo que encontrar

el primer t tq $n^t \cdot f(n)$ no es sol

de la homogenea.

Supongamos $\exists\ \alpha$ / $\alpha \cdot 2^n = \overbrace{n \cdot 2^n}^{n^1 \cdot f(n)}$ $\forall\ n \geq 0$

$\Rightarrow$ puedo dividir por 2^n y obtengo

$\alpha = n$ $\forall\ n \geq 0$ y esto es absurdo

entonces usando la tabla vemos que

la solución particular que corresponde a 2^n es $A \cdot 2^n$ pero tenemos que multiplicar por n^t para que funcione

o sea $a_n^{(p)} = n \cdot A \cdot 2^n$

Falta ver que es A: para ver eso tenemos que substituir $a_n^{(p)} = nA2^n$ en la recurrencia que nos dieron

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n$$

$$(n+1)A\,2^{n+1} - 2 \cdot nA2^n = 2^n$$

$$\underbrace{\cancel{n \cdot A \cdot 2^{n+1}}} + A \cdot 2^{n+1} - \underbrace{\cancel{2^{n+1} \cdot n \cdot A}} = 2^n$$

$$A \cdot 2^{n+1} = 2^n$$

$$A \cdot 2 = 1 \rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

y $a_n^{(p)} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2^n$

La solución general es

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

$$= \alpha \cdot 2^n + \frac{1}{2} n 2^n$$

Además sabemos que $a_0 = 0$

$\Rightarrow 0 = a_0 = \alpha \cdot 2^0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 2^0 = \alpha \Rightarrow \alpha = 0$

y $a_n = \frac{1}{2} n 2^n$

Ejemplo que no está en el práctico

$a_{n+1} - 2a_n = 2^n + 3^n$
$= f(n)$

Cuando $f(n)$ es suma de 2 o más funciones, para hallar la solución particular hay que encontrar una solución particular para cada sumando y sumarlas.

La recurrencia $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$

tiene sol. <u>part.</u> $a_n^{(p)} = \frac{1}{2} n 2^n$ por lo visto recien.

La recurrencia $a_{n+1} - 2a_n = 3^n$

como 3^n no es sol. de la homogenea

$\Rightarrow \boxed{a_n^{(p)} = A \cdot 3^n}$

La solución de la homogenea es

$\alpha \cdot 2^n$. Suponé existe α /

$\alpha \cdot 2^n = 3^n \quad \forall \ n$

si $n=1 \Rightarrow \alpha = 3/2$
si $n=2 \rightarrow \alpha = 9/4$

Substituyendo $a_{n+1}^{(p)} - 2a_n^{(p)} = 3^n$

$$A \cdot 3^{n+1} - 2A3^n = 3^n$$

$3 \cdot 3^n$

$$3 \cdot A - 2A = 1$$

$\Rightarrow \boxed{A = 1}$ y $\boxed{a_n^{(p)} = 3^n}$

Una solución particular de

$a_{n+1} - 2a_n = 2^n + 3^n$ es

la suma de los particulares de $f(n) = 2^n$

y $f(n) = 3^n$ respectivamente.

o sea $\boxed{a_n^{(p)} = \frac{1}{2} n \, 2^n + 3^n}$

La solución general es $a_n = \alpha \cdot 2^n + \frac{1}{2} n 2^n + 3^n$

Ejercicio 5. (Parcial 2001)
Se considera la siguiente ecuación:

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 2^n, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

Hallar α, β y a_{100} sabiendo que: $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 1$ y $a_3 = 17$.

$n=2 \qquad a_2 + \alpha a_1 + \beta a_0 = 2^2$

$n=3 \qquad a_3 + \alpha a_2 + \beta a_1 = 2^3$

$1 + 5\alpha + \beta = 4$

$17 + \alpha + 5\beta = 8$

$\begin{cases} 5\alpha + \beta = 3 \\ \alpha + 5\beta = -9 \end{cases}$

con eso hallan α y β y luego se resuelve como antes.