Universidad de la República | **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística | **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 10
Relaciones I

Aclaración: En todos los ejercicios:

- R^{-1} denota la relación inversa, o sea $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$;
- $\overline{R}$ la relación complementaria, o sea, $\overline{R} = \{(x, y) : (x, y) \notin R\}$
- RS el producto de las relaciones R y S (denotado como $R \circ S$ en el libro de Grimaldi), o sea $RS = \{(x, z) : \exists\, y, (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in S\}$.

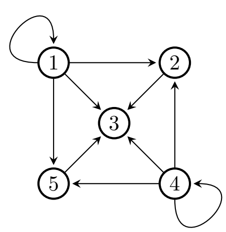
Ejercicio 1. Determine si las siguientes relaciones son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas ($(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$) o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

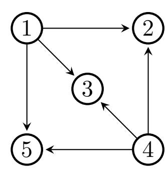
a. $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.

b. $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$. **d**. $R = \emptyset$.

c. $R = \{(1, 3), (1, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\}$. **e**. $R = A \times A$.

Ejercicio 2. Determine si las relaciones siguientes son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, donde cada relación se representa en un grafo dirigido (o digrafo):

i)


ii)


Ejercicio 3. Considere el conjunto de propiedades $P = \{\text{reflexiva, simétrica, transitiva}\}$. Para cada subconjunto T de P, encuentre una relación que cumpla las propiedades de T y no cumpla las de $P \setminus T$.

Ejercicio 4. Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

a. Elabore un criterio para decidir si R es o no *simétrica* basándose en la representación de la relación en grafos dirigidos.

b. Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, R^{-1}, RS, $R \cup S$, $R \cap S$?

c. Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexiva, antisimétrica, asimétrica y transitiva*.

Ejercicio 5.

(a) Determinar la cantidad de relaciones R que se pueden definir sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$.

(b) Construir el diagrama de flechas (o digrafo) de alguna de estas relaciones.

Ejercicio 6. ¿Cuántas relaciones binarias

(a) reflexivas, (b) simétricas, (c) antisimétricas;

son definibles sobre un conjunto con n elementos?

Ejercicio 7. Sea A un conjunto con n elementos y R una relación sobre A. Considere cada una de las siguientes proposiciones. Demuéstrela en caso que sea verdadera y encuentre un contraejemplo en el caso que sea falsa.

a. Si R es reflexiva sobre A, entonces $\#R \geq n$.
b. Si $\#R \geq n^2 - k$, con $k < n$ entonces existe $a \in A$ tal que $(a, a) \in R$.

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir las clases de equivalencia de la relación:

(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

(b) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es un número par.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es múltiplo de 10.

(d) $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

Ejercicio 9. Probar que si R es una relación en A que es simétrica y transitiva, tal que para todo a en A existe algún elemento b en A tal que aRb, entonces R es una relación de equivalencia en A.

Ejercicio 10. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia definidas en $\{1, 2, 3\}$.

Ejercicio 11. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que tienen exactamente 3 clases de equivalencia.

Ejercicio 12. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea R_n la cantidad de relaciones de equivalencia que pueden definirse en un conjunto con n elementos. Para cada $n, i \in \mathbb{N}$ sea $S(n, i)$ el número de Stirling del segundo tipo. Probar que:

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + \cdots + C_n^n R_0$.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $R_n = S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n, n)$

Ejercicio 13. Demuestre o halle un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

a. El producto de dos relaciones puede ser una función sin que ninguna de ellas lo sea.
b. La inversa de una relación puede ser una función sin que ella misma lo sea.
c. El producto de dos relaciones puede dar la relación vacía sin que ninguna de ellas lo sea

Relaciones

Def

Sean A, B dos conjuntos, $R \subset A \times B$

decimos que es una relación entre A y B.

Ej: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{8, 9\}$

$R = \{(1, 8), (2, 9), (1, 9)\} \to 1R8, 2R9, 1R9$

Si $(a,b) \in R$ decimos que a está relacionado con b y escribimos aRb.

Nos interesa cuando $A = B$.

Def 1: $R \subset A \times A$ es una relación reflexiva si $aRa \ \forall a \in A$.
o sea: $(a, a) \in R \quad \forall a \in A$.

Def 2: $R \subset A \times A$ " " " simétrica

si cuando $aRb \Rightarrow bRa$.
o sea: si $(a,b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.

Def 3: $R \subset A \times A$ " " " transitiva

si cuando aRb y $bRc \Rightarrow aRc$
o sea: si $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

Def 4: $R \subset A \times A$ " " " antisimétrica

si cuando $a \neq b$ y $aRb \Rightarrow b \not R a$

o sea: si $a \neq b$, $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R$.

Ejercicio 1. Determine si las siguientes relaciones son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas ($(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$) o transitivas en $A = \{1,2,3,4\}$:

a. $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$.

b. $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$.

c. $R = \{(1,3), (1,1), (3,1), (1,2), (3,3), (4,4)\}$.

d. $R = \emptyset$.

e. $R = A \times A$.

a. $R = \{\boxed{(1,1)}, (1,2), (2,1), \boxed{(2,2)}, \boxed{(3,3)}, (3,4), (4,3), \boxed{(4,4)}\}$.

Como $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \in R$

$\Rightarrow$ R es reflexiva.

Es simétrica ya que cualquier $(a,b) \in R$ también $(b,a) \in R$.

$(1,2), (2,1) \in R$ para que sea transitiva tiene que pasar $(1,1) \in R$

$(3,4), (4,3) \in R$ " " $(3,3) \in R$

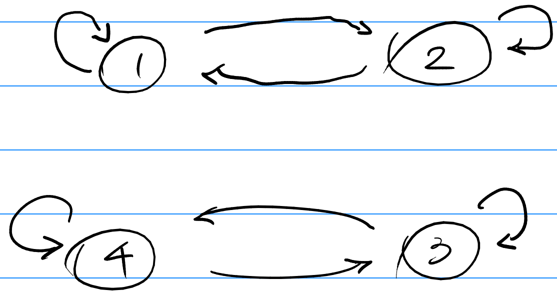
$(4,3), (3,4) \in R$ " " $(4,4) \in R$

$(1,1), (1,2) \in R$ " " $(1,2) \in R$

Es transitiva ya que para todos los $(a,b), (b,c) \in R$ también $(a,c) \in R$

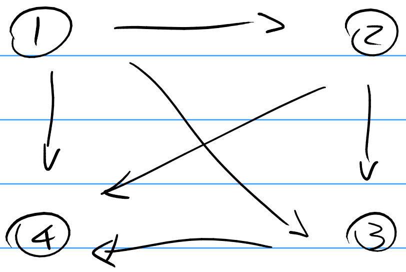
No es antisimétrica.

La relación se puede representar como



por cada par (a,b) dibujamos una flecha entre a y b

b. $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$.



Reflexiva ~~NO~~

faltan los elementos

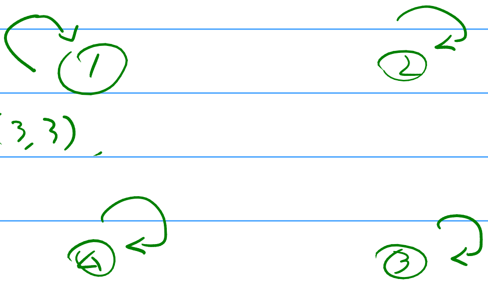
$(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$

simétrica NO

$(1,2) \in R$ pero $(2,1) \notin R$

transitiva si

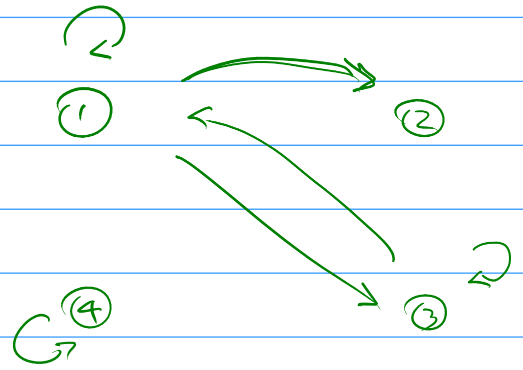
antisimétrica si



$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

- reflexiva ✓
- simétrica ✓
- transitiva ✓
- antisimétrica ✓

c. $R = \{(1,3),\ (1,1),\ (3,1),\ (1,2),\ (3,3),\ (4,4)\}$.

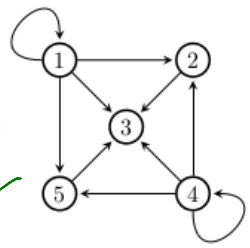


- reflexiva NO
  falta el (2,2)
- simétrica NO
  falta (2,1)
- transitiva NO
  falta (3,2)
- antisimétrica NO

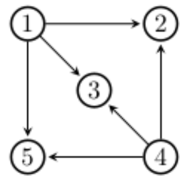
$(3,1),\ (1,2) \in R$ pero $(3,2) \notin R$

Ejercicio 2. Determine si las relaciones siguientes son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, donde cada relación se representa en un grafo dirigido (o digrafo):

i)



ii)



$R = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,5),\ (2,3),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (5,3)\}$

i

- refl. NO
- sim NO
- trans si
- antisim si
- asim NO

ii

- refl NO
- sim NO
- trans si
- antisim si
- asim si

R <u>no</u> es transitiva si $\exists$ $(a,b) \in R$

$(b,c) \in R$ y

además $(a,c) \notin R$

Ejemplo de la vida real:

$A =$ países

$R = \{(a,b)$: hay un vuelo entre el país a y el país $b\}$

(Uruguay, Argentina) $\in R$

(Argentina, Uruguay) $\in R$

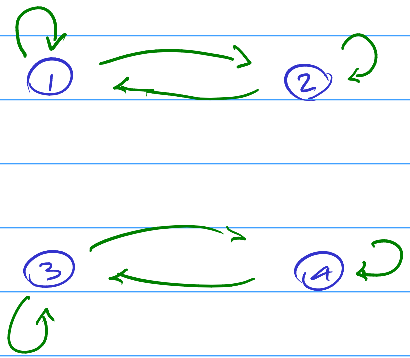
(Uruguay, Australia) $\notin R$

Aclaración: En todos los ejercicios:

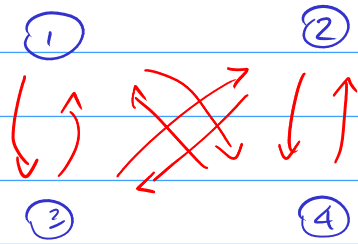
- R^{-1} denota la relación inversa, o sea $R^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in R\}$;
- $\overline{R}$ la relación complementaria, o sea, $\overline{R} = \{(x,y) : (x,y) \notin R\}$
- RS el producto de las relaciones R y S (denotado como $R \circ S$ en el libro de Grimaldi), o sea $RS = \{(x,z) : \exists\, y, (x,y) \in R \text{ y } (y,z) \in S\}$.

a. $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$.

R



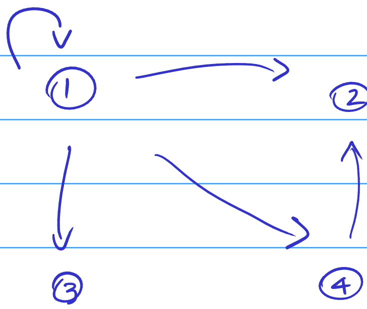
$\overline{R}$



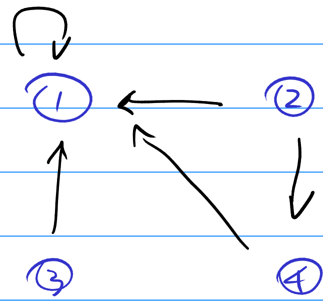
$\overline{R} = \{(x,y) \in A \times A : (x,y) \notin R\}$

$= \{(1,3), (3,1), (2,4), (4,2), (2,3), (3,2), (1,4), (4,1)\}$

R



R^{-1}

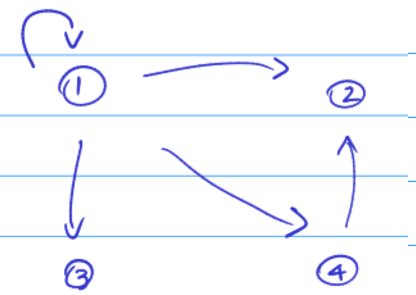


$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (4,2)\} \subset A \times A$

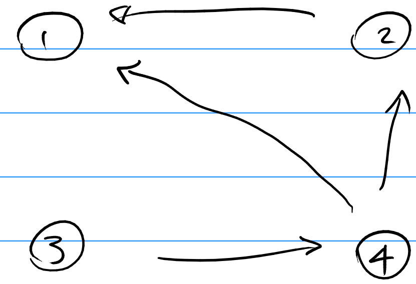
$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$R^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (2,4)\}$

R



S



(1,4)

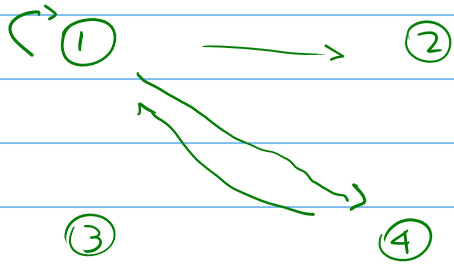
$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (4,2)\}$

$S = \{(2,1), (3,4), (4,1), (4,2)\}$

(1,1)

- RS el producto de las relaciones R y S (denotado como $R \circ S$ en el libro de Grimaldi), o sea $RS = \{(x,z) : \exists\, y, (x,y) \in R \text{ y } (y,z) \in S\}$.

RS



$RS = \{(1,1), (1,2), (1,4), (4,1)\}$

(1,2), (2,1)   (1,4), (4,2)   (1,3), (3,4)   (4,2), (2,1)

Ejercicio 4. Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

a. Elabore un criterio para decidir si R es o no *simétrica* basándose en la representación de la relación en grafos dirigidos.

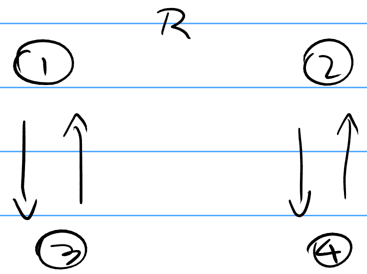
b. Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, R^{-1}, RS, $R \cup S$, $R \cap S$?

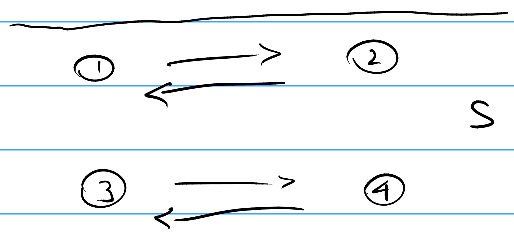
c. Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexiva*, *antisimétrica*, *asimétrica* y *transitiva*.

a. Si tengo una flecha entre los nodos x e y entonces tiene que existir una flecha entre y y x.

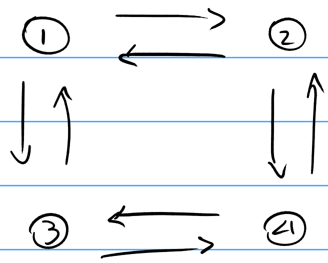
b. 10 minutos.

$R \subset A \times A$
$S \subset A \times A$ $\Rightarrow$ $R \cap S \subset A \times A$
$\Rightarrow$ $R \cup S \subset A \times A$

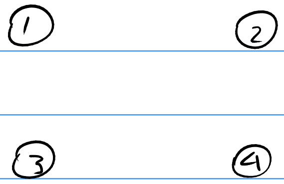




$R \cup S$



$R \cap S$



R, S simétricas

R^{-1} : $R^{-1} = R$ que es sim.
$\overline{R}$: si
$R \cdot S$: No siempre
$R \cap S$: si
$R \cup S$: si

$R = \{(1,2),(2,1)\}$ $\qquad$ $S = \{(2,2)\}$

R $\quad 1 \rightleftarrows 2$ $\qquad$ S $\quad 1 \qquad 2 \circlearrowleft$

R y S son simétricas

RS $\quad 1 \longrightarrow 2$ $\qquad$ $RS = \{(1,2)\}$

no es simétrica

c. la completan ustedes.

Ejercicio 5.

(a) Determinar la cantidad de relaciones R que se pueden definir sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$.

(b) Construir el diagrama de flechas (o digrafo) de alguna de estas relaciones.

determinar la cantidad de relaciones en el conjunto {1, 2, 3, 4} que sean simétricas, contengan a (1, 2) y a (3, 3)

chatgpt

Para determinar la cantidad de relaciones en el conjunto {1, 2, 3, 4} que sean simétricas, contengan a (1, 2) y a (3, 3), podemos analizar las posibles combinaciones.

Dado que la relación debe ser simétrica, si contiene a (1, 2), también debe contener a (2, 1) para cumplir con la propiedad de simetría. Además, como debe contener a (3, 3), esto significa que el elemento 3 está relacionado consigo mismo en la relación.

Por lo tanto, las relaciones que cumplen con estas condiciones son aquellas que contienen los pares:

- (1, 2) y (2, 1)
- (3, 3)

Ahora, para el elemento 4, hay dos opciones: puede estar relacionado con cualquier otro elemento o no estar relacionado en absoluto.

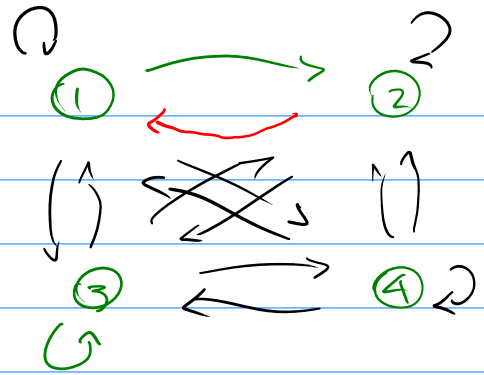
Por lo tanto, las posibles relaciones que cumplen con las condiciones dadas son:

1. {(1, 2), (2, 1), (3, 3)} - En este caso, el elemento 4 no está relacionado con ningún otro elemento.
2. {(1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 1)} - Aquí, el elemento 4 está relacionado con el elemento 1.

Por lo tanto, hay dos relaciones posibles que cumplen con las condiciones dadas.

La solución está mal, recomiendo fuertemente NO usarlo.

$R \subset A \times A$, $A = \{1,2,3,4\}$



- Sim
- $(1,2) \in R$
- $(3,3) \in R$

Primero hay que decidir si $(1,3),(3,1) \in R$

después " " " " $(2,4),(4,2) \in R$

⋮

" " " " $(1,1) \in R$

⋮

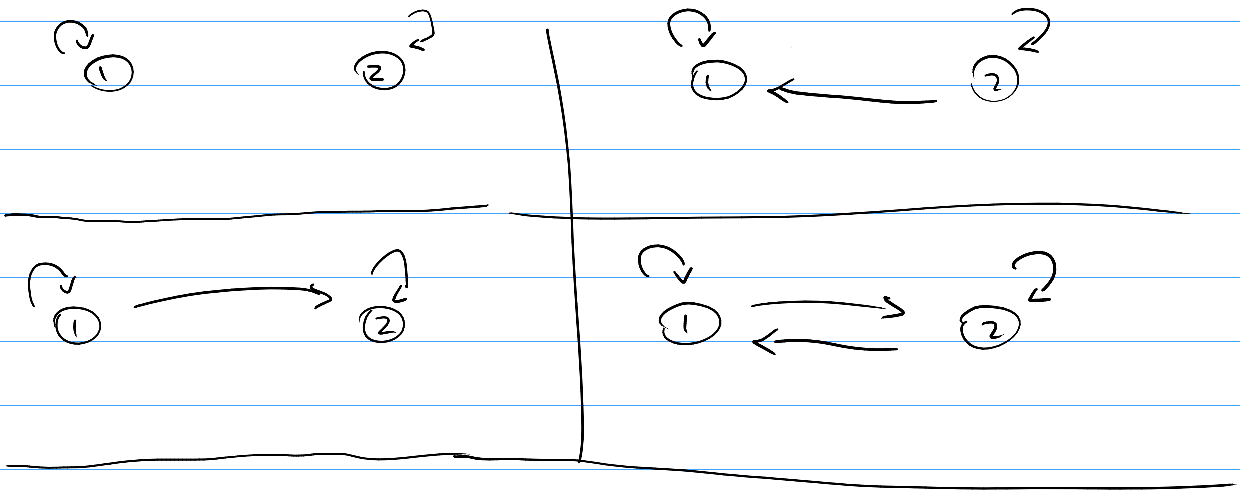
¿Cuántas decisiones hay que tomar?

8 decisiones $\longrightarrow$ 2^8 relaciones posibles

$= 256$

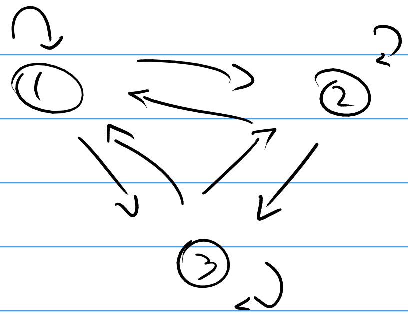
6. A con n elementos

a. ¿cuántas rels reflexivas hay?



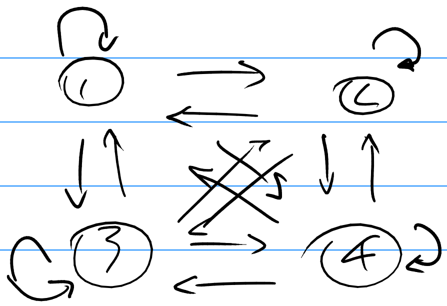
si $n=2$ hay $4 = 2^2$

Si A tiene n elementos, ¿cuántas flechas posibles hay entre elementos de A? $n^2 = |A \times A|$



$9 = 3 \cdot 3$

si X conjunto hay $2^{\#X}$ subconjuntos de X



$16 = 4 \cdot 4$

$R \subset A \times A$

La cantidad total de relaciones en A es: $2^{\#(A \times A)} = 2^{(n^2)}$

a. En las reflexivas ya se que $\underbrace{(a_1, a_1), (a_2, a_2), \dots, (a_n, a_n)}$ $\in R$

para construir R hay que ver primero si (a_1, a_2) está o no en R luego (a_1, a_3), $\dots$, o sea $n^2 - n$

No hay que decidir si $(a_i, a_i) \in R$ porque son reflexivas. O sea hay 2^{n^2-n} relaciones reflexivas en A.

Ejercicio 6. ¿Cuántas relaciones binarias

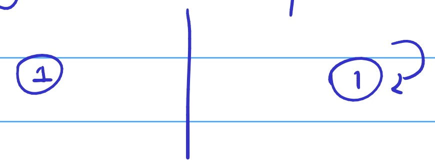
(a) reflexivas, (b) simétricas, (c) antisimétricas;

son definibles sobre un conjunto con n elementos?

$R \subset A \times A$ es antisimétrica si $x \neq y$ y xRy
$\Rightarrow y \not R x$

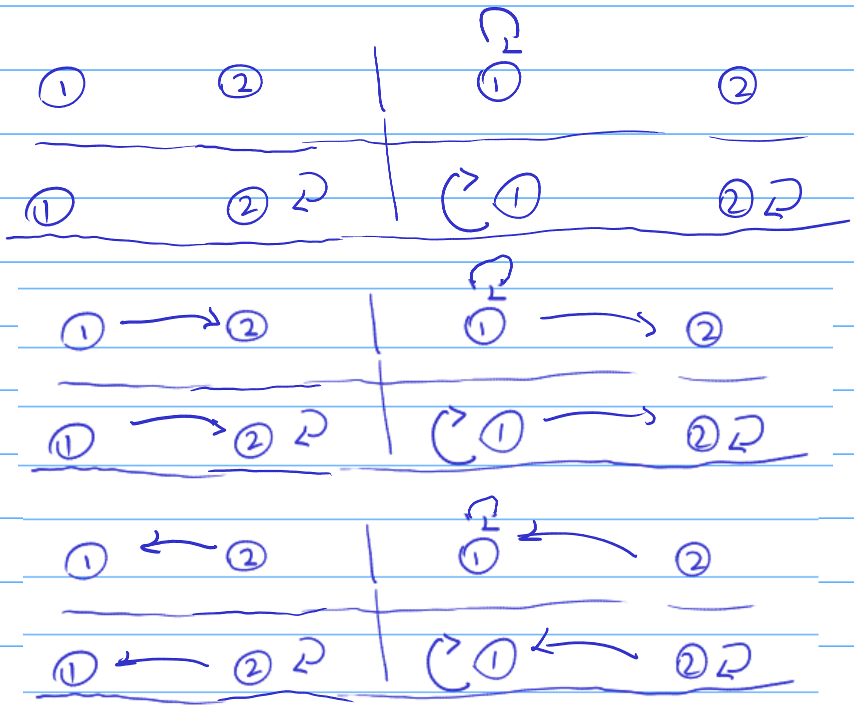
c. Vemos algunos n para fijar ideas

$n = 1$:



$\boxed{2}$

$n = 2$:



$\boxed{12}$

$12 = 2^2 \cdot 3$

Por cada par de elementos $x \neq y$ en A tenemos tres posibilidades:

$x \not R y$ y $y \not R x$

$x R y$ y $y \not R x$

$x \not R y$ y $y R x$

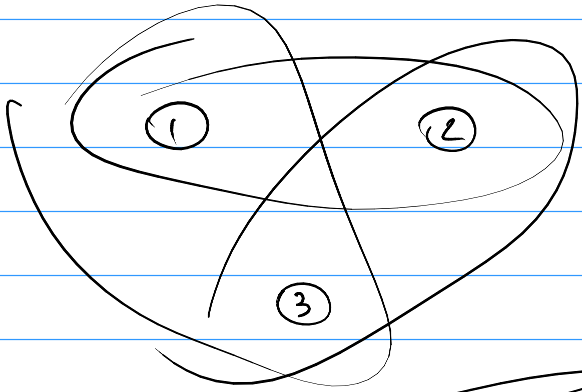
Por cada elemento x de A tenemos dos posibilidades:

xRx ó $x \not R x$

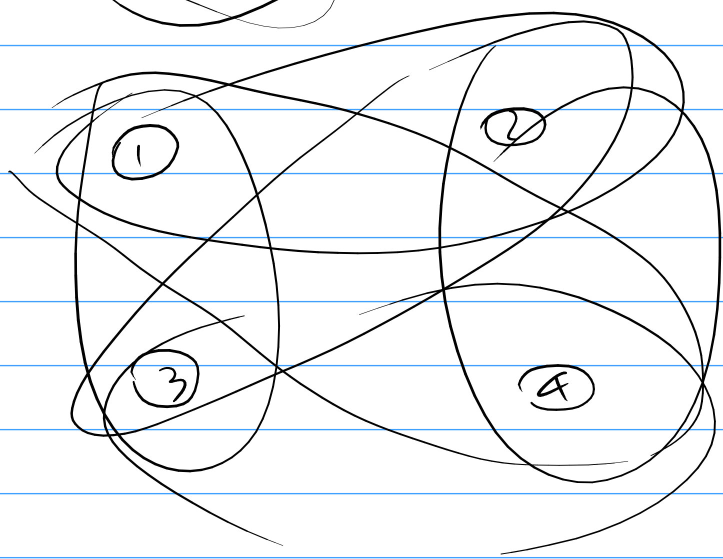
Por la regla del producto tenemos

$$\boxed{2^{\boxed{n}} \cdot 3^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}}$$ relaciones antisimétricas

→ cantidad de subconjuntos de tamaño 2: $C(n,2)$



$\{1,2\}$
$\{1,3\}$
$\{2,3\}$



Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir las clases de equivalencia de la relación:

(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

(b) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es un número par.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es múltiplo de 10.

(d) $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$. $\longleftarrow$ solo para los que están cursando GAL I.

R es de eq. si R es
- reflexiva
- simétrica
- transitiva

$[a] = \{b \in A : aRb\}$ $\longleftarrow$ clase de eq. de a.
$= \{b \in A : bRa\}$

a. $A = \mathbb{Z}$, aRb si $a^2 = b^2$

- reflexiva: si $a \in \mathbb{Z}$, $a^2 = a^2 \Rightarrow aRa$
- simétrica: si aRb $a^2 = b^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow bRa$
- transitiva: aRb, bRc $\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 \\ b^2 = c^2 \end{array}\right\} \left| \underline{\overline{a^2 = c^2}} \right|$

$\Rightarrow aRc.$

$[0] = \{b \in \mathbb{Z} : b^2 = 0^2 = 0\} = \{0\}$

$[1] = \{b \in \mathbb{Z} : b^2 = 1\} = \{1, -1\}$

$[-1] = \{b \in \mathbb{Z} : b^2 = (-1)^2 = 1\} = \{1, -1\}$

Si $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ $[n] = \{n, -n\}$

$[0] = \{0\}$

b. $A = \mathbb{Z}$, aRb si $a-b$ es par

. reflexiva: $a-a=0$ es par $\Rightarrow aRa$

. simétrica: si $aRb \Rightarrow a-b$ par
$\Rightarrow b-a$ par $\Rightarrow bRa$

. transitiva: si $aRb, bRc \Rightarrow$

$a-b$, $b-c$ son pares (suma de pares es par) $\Rightarrow (a-b)+(b-c) = a-c$ es par
$\Rightarrow aRc$.

$[0] = \{ b \in \mathbb{Z} : 0Rb \}$

$= \{ b \in \mathbb{Z} : -b \text{ es par} \} = \{ \dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, \dots \}$

todos los pares.

$[1] = \{ b \in \mathbb{Z} : 1Rb \} = \{ b \in \mathbb{Z} : 1-b \text{ par} \}$

$= \{ \dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots \}$

todos los impares

Dado $x \in \mathbb{Z}$ si x par $[x] = [0]$
si x impar $[x] = [1]$

Teo: R rel de eq. en A, $x, y \in A$:

- $x \in [x]$
- $x R y \iff [x] = [y]$
- $[x] \cap [y] = \emptyset$ ó $[x] = [y]$

c. $x R y$ sii $x - y$ múltiplo de 10

La prueba de que es de eq es igual.

Las clases: $[0] = \{x \in \mathbb{Z} : x - 0$ múltiplo de $10\}$

$= \{\dots, -20, -10, 0, 10, 20, \dots\} = 10 \cdot \mathbb{Z}$

$[1] = \{x \in \mathbb{Z} : x - 1$ múltiplo de $10\}$

$x - 1 = 10 \cdot k \Rightarrow \boxed{x = 10 \cdot k + 1}$

$= \{\dots, -19, -9, 1, 11, 21, \dots\} = 10 \cdot \mathbb{Z} + 1$

$[2] = \{\dots, -18, -8, 2, 12, 22, \dots\} = 10\mathbb{Z} + 2$

$[3] = \{\dots, -17, -7, 3, 13, 23, \dots\}$

$\vdots$

$[9] = \{\dots, -11, -1, 9, 19, 29, \dots\} = 10\mathbb{Z} + 9$

$[10] = [0]$

Hay 10 clases distintas $[0], [1], \dots, [9]$.

<u>Teorema:</u> Hay una biyección entre los particiones de A y las relaciones de equivalencia de A.

Ejercicio 10. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia definidas en $\{1,2,3\}$.

Ejercicio 11. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia en $\{1,2,3,4,5,6\}$ que tienen exactamente 3 clases de equivalencia.

10. $A = \{1,2,3\}$

$P_1 = \{\{1,2,3\}\}$

$P_2 = \{\{1\},\{2,3\}\}$, $P_3 = \{\{2\},\{1,3\}\}$, $P_4 = \{\{3\},\{1,2\}\}$

$P_5 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ 5 particiones o sea 5 rels. de eq.

11. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

Quiero contar la cantidad de maneras de particionar a mi conj de 6 elementos en 3 subconjuntos no vacíos.

Esto es el número de Stirling

$$S(6,3) = \left(\sum_{i=0}^{6} (-1)^i \, C_i^6 \, (6-i)^3 \right) \Big/ 3! = 90$$

Ejercicio 12. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea R_n la cantidad de relaciones de equivalencia que pueden definirse en un conjunto con n elementos. Para cada $n, i \in \mathbb{N}$ sea $S(n,i)$ el número de Stirling del segundo tipo. Probar que:

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + \cdots + C_n^n R_0$.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $R_n = S(n,1) + S(n,2) + \cdots + S(n,n)$

Vimos en el ej. 10 que $R_3 = 5$

es fácil ver que $R_0 = 1$, $R_1 = 1$, $R_2 = 2$

b. Contar rels. de eq. es contar particiones

R_n = # particiones con 1 subconjuntos

+ # " " 2 "

+ # " " 3 "

⋮

+ # " " n "

$= S(n,1) + S(n,2) + \cdots + S(n,n)$

a. Idea: usar la regla de la suma

En un conjunto de tamaño $n+1$ contar la cantidad de particiones donde el conjunto donde está $n+1$ tiene 1 elemento, 2 elementos, ..., $n+1$ elementos por separado y luego sumar.

Ej: particiones de $\{1,2,3,4\}$ donde 4 está en un conjunto con un solo elemento

$$\left.\begin{array}{l} \{\{1,2,3\},\{4\}\} \\ \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\} \\ \{\{2\},\{1,3\},\{4\}\} \\ \{\{3\},\{1,2\},\{4\}\} \\ \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\} \end{array}\right\} 5 = R_3$$