PRÁCTICO 1: Inducción completa

Ejercicio 1. Probar de dos formas distintas que

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

para todo natural n.

Ejercicio 2. Probar que

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

para todo natural n.

Ejercicio 3. Probar que

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2$$

para todo natural n.

Ejercicio 4. Probar que $n^2 \geq n+1$ para todo $n \geq 5$.

Ejercicio 5. Probar que $2^n \geq n^2$ a partir de cierto natural n_0 que se debe encontrar.

Ejercicio 6. Probar que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural n.

Ejercicio 7. Probar que para todo natural n existe un natural k tal que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k$.

Ejercicio 8. Sea n un número natural tal que $n \geq 1$. Consideremos un tablero cuadrado compuesto por $2^n \times 2^n$ cuadraditos al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demostrar que es posible cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos.

Ejercicio 9. Probar que si $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 30$ y $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n \, \forall n \geq 1$ entonces $a_n \geq 3^n, \ \forall n \in \mathbb{N}^+$.

Ejercicio 10. Demostrar que, a partir de un segmento de longitud 1 en el plano, es posible construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}^+$.

Ejercicio 11. Probar que todo número natural mayor que 1 se puede expresar como producto de números primos.

Ejercicio 12. Probar que el Principio del Buen Orden implica el Principio de Inducción Completa sobre los números naturales.

$a_1 = 3$, $a_2 = 10$, $a_3 = 30$

$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n \qquad n \geq 1$

$a_4 = a_{1+3} = 2 \cdot a_{1+2} + 7\, a_{1+1} + a_1$

$= 2 \cdot 30 + 7 \cdot 10 + 3 = 133 \geq 81 = 3^4$

$a_5 = a_{2+3} = 2\, a_{2+2} + 7\, a_{2+1} + a_2$

$= 2 a_4 + 7 a_3 + a_2$

$\vdots$

Queremos ver que $a_n \geq 3^n \quad \forall \; n \geq 1$

Pasos base
$$\begin{cases} n = 1 & a_1 \geq 3^1 \quad \checkmark \\ n = 2 & a_2 = 10 \geq 3^2 = 9 \quad \checkmark \\ n = 3 & a_3 = 30 \geq 3^3 = 27 \quad \checkmark \end{cases}$$

(HI) sea $\boxed{k \geq 3}$ supongo que
$a_i \geq 3^i \quad \forall \quad 1 \leq i \leq k$

(TI) $a_{k+1} \geq 3^{k+1}$

$$\boxed{a_{k+1} = 2a_k + 7a_{k-1} + a_{\boxed{k-2}}}$$

$k+1 = (k-2) + 3$

$(k-2) + 2 = k$

$(k-2) + 1 = k-1$

$(k-2) = k-2$

por hipótesis inductiva

$a_k \geq 3^k$

$a_{k-1} \geq 3^{k-1}$

$a_{k-2} \geq 3^{k-2}$

$a_{k+1} = 2a_k + 7a_{k-1} + a_{k-2} \geq 2 \cdot 3^k + 7\, 3^{k-1} + 3^{k-2}$

$= 2 \cdot 3^{k-2} \cdot 3^2 + 7\, 3^{k-2} \cdot 3^1 + 3^{k-2}$

$= 3^{k-2} (2 \cdot 9 + 7 \cdot 3 + 1)$

$= 3^{k-2} (18 + 21 + 1) = 3^{k-2} \cdot 40$

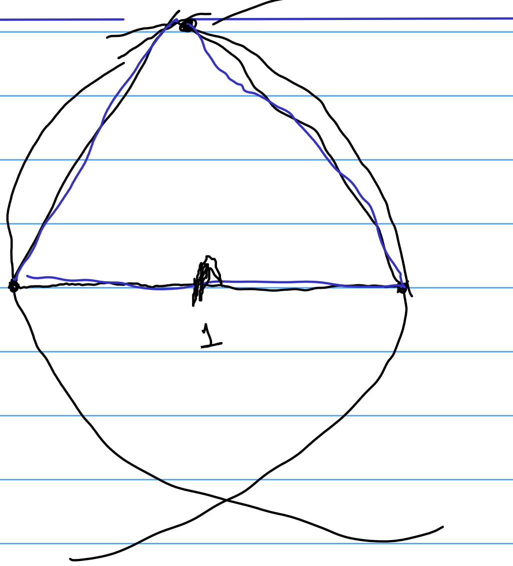
$\geq 3^{k-2} \cdot 27$

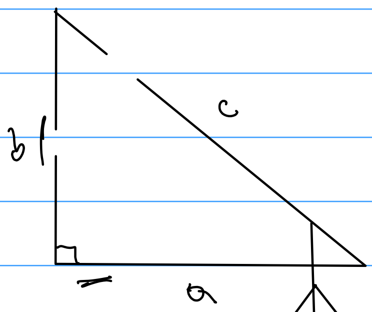
$$3^k = \overbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdots 3}^{k}$$
$$= \underbrace{3\cdot 3\cdots 3}_{k-2}\cdot\underbrace{3\cdot 3}_{2} = 3^{k-2}\cdot 3^2$$

$$= 3^{k-2}\cdot 3^3$$
$$= 3^{k+1}$$

Por inducción fuerte $a_n \geq 3^n \ \forall \ n \geq 1$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c \\ \text{si } a \geq b \text{ y } x > 0 \Rightarrow a\cdot x \geq b \cdot x \end{array}}$$

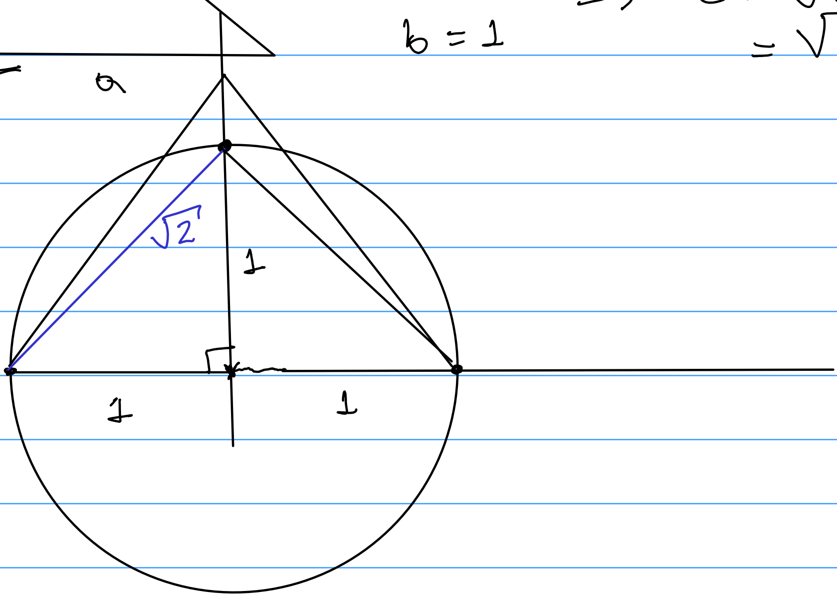




$a^2 + b^2 = c^2$

si $a = b = 1 \Rightarrow c = \sqrt{2}$

$a = \sqrt{k}$, $b = 1$ $\Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{k+1}$

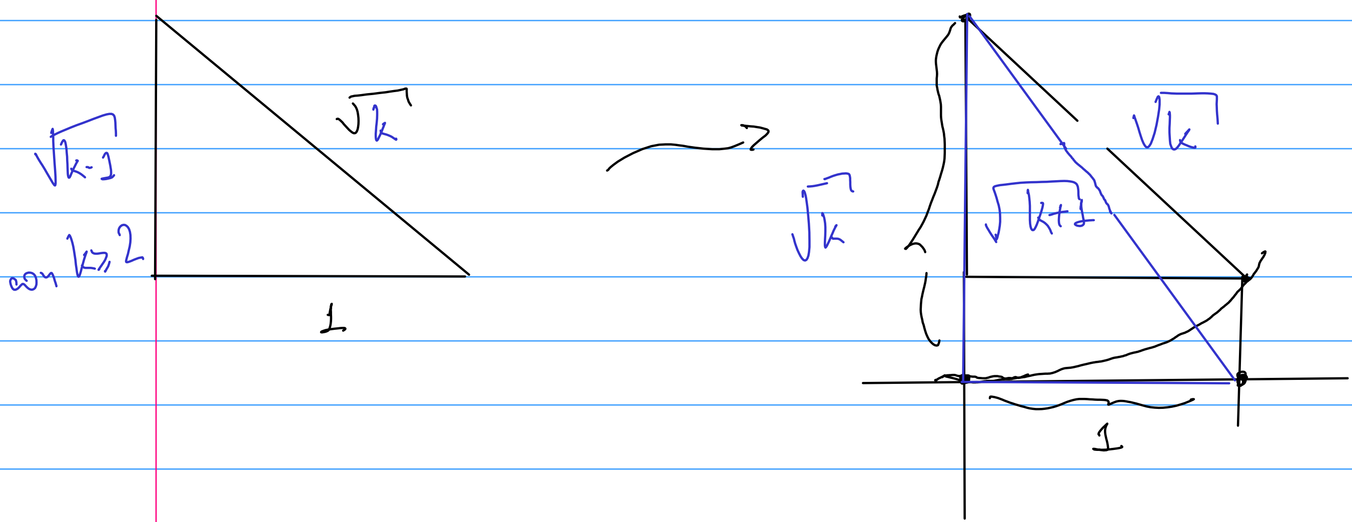


Paso base: construir un segmento de longitud $\sqrt{2}$ con regla y compás ✓

<u>HI</u>: Puedo construir un segmento de longitud $\sqrt{k}$, $k \geq 2$

<u>TI</u>: Puedo construir un segmento de longitud $\sqrt{k+1}$

PB $\rightsquigarrow$ construimos el triángulo



Probamos algo más complicado:
"Dado un segmento de largo 1 puedo construir un triángulo rectángulo de lados $1, \sqrt{n}, \sqrt{n+1}$ $\forall n$

$$\sqrt{\left(\sqrt{k}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{k+1}$$

$$k+1 = k+1$$