Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 4: Combinatoria III

Ejercicio 1. En una playa se juntan 13 chicos y deciden hacer 4 equipos para jugar al voleibol, para ello hacer tres equipos de 3 jugadores y uno de 4. Entre los chicos se encuentra uno sumamente habilidoso y otro que es de madera, los restantes 11 jugadores son intermedios. Para equiparar, al habilidoso lo colocan en uno de los equipos de 3 jugadores y al de madera en el equipo de 4 jugadores.
¿De cuántas formas se pueden armar los equipos?

Ejercicio 2. Para una selección de fútbol, fueron convocados 2 goleros, 6 zagueros, 7 mediocampistas y 4 atacantes. ¿De cuántos modos es posible formar una selección con un golero, 4 zagueros, 4 mediocampistas y 2 atacantes?

Ejercicio 3.

(a) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$.

(b) ¿Cuántas soluciones hay si se reemplaza el signo $=$ por el signo $<$?
O sea: hallar la cantidad de soluciones naturales de la inecuación $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 < 4$.

(c) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ tal que se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones $x_1 \geq 3$ y $x_4 \geq 3$.

Ejercicio 4.

a. Hallar la cantidad de subconjuntos de un conjunto con n elementos razonando con la fórmula del binomio.

b. Probar que: $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_j^n = 0$.

c. (Ej. 4 del 1^{er} parcial del 2000) Hallar el valor de la siguiente suma: $\displaystyle\sum_{k=0}^{203} C_k^{203} (-4)^k$.

Ejercicio 5.

(a) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de $(x^5 + x - 1)^{10}$.

(b) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio $(2x + 4y + 2z + 5)^{14}$.

Ejercicio 6. (Ej. 4 del 2^{do} examen del curso 2001)
Hallar la cantidad n de palabras de 1 a 5 letras que se pueden formar usando las letras de la palabra *CASAS*. (Por ejemplo *C* y *AA* son dos palabras posibles, pero *CAC* no lo es).

Ejercicio 7. (Ej. 2 del 1^{er} parcial del curso 2009)
¿Cuántas palabras de longitud 6 existen que no tengan dos consonantes o dos vocales juntas?

Ejercicio 8. Dados $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, m\}$, hallar la cantidad de funciones $f : A \to B$ tales que:

(a) No hay restricciones.

(b) f es inyectiva.

(c) f es biyectiva

(d) f es monótona creciente estrictamente.

(e) f es monótona creciente.

(f) Cada elemento $i \in B$ es alcanzado r_i veces, donde $r_1 + \ldots + r_m = n$.

Ejercicio 9.

a. Para n y t positivos, repasar la demostración (hay al menos dos posibles demostraciones) que el coeficiente de $x_1^{n_1}\ x_2^{n_2} \ldots x_t^{n_t}$ en $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$ es

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \ldots n_t!}$$

con $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$.

b. (Ej. 3 del 1^{er} parcial del 2001) Determinar el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $\left(x^3 - x^2 + x - 1\right)^6$.

c. (Ej. 1b del 1^{er} parcial 2018 sem. impar) Hallar el coeficiente de x^6 en $(2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5)^5$.

Ejercicio 8. Dados $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, m\}$, hallar la cantidad de funciones $f : A \to B$ tales que:

(a) No hay restricciones.

(b) f es inyectiva.

(c) f es biyectiva

(d) f es monótona creciente estrictamente.

(e) f es monótona creciente.

(f) Cada elemento $i \in B$ es alcanzado r_i veces, donde $r_1 + \ldots + r_m = n$.

8.

a. • $f(1) \in B$ y puede tomar m valores distintos

• Una vez elegido $f(1)$, $f(2)$ puede tomar m valores distintos (pq no hay restricciones)

• una vez elegidos $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ puede tomar m valores distintos (pq no hay restricciones).

⋮

• una vez elegidos $f(1), f(2), \ldots, f(n-1)$, entonces $f(n)$ puede tomar m valores distintos

Por la regla del producto tenemos

$\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdots m}_{n\text{-veces}} = m^n = \#B^{\#A}$ funciones $f : A \to B$

b. Recordamos la definición.

$f : A \to B$ es inyectiva si $\forall\, a, a' \in A$ tq $f(a) \neq f(a') \to a \neq a'$.

• podemos elegir $f(1)$ de $m-0$ maneras distintas

• una vez elegido $f(1)$, $f(2)$ puede tomar $m-1$ valores distintos ya que no puede ser igual a $f(1)$

. una vez elegido $f(1)$ y $f(2)$, entonces $f(3)$ puede tomar $m-2$ valores posibles ya que no puede ser igual a $f(1)$ ni a $f(2)$!

⋮

. una vez elegidos $f(1), f(2), \dots, f(n-1)$, entonces $f(n)$ puede tomar $m-(n-1)$ valores posibles

si $\boxed{n > m}$ esto no tiene sentido entonces no hay funciones inyectivas de A en B.

si $n \leq m$ por la regla del producto hay $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-(n-1))$

$$= \frac{m!}{(m-n)!} = P(m,n)$$

$$= P(\#B, \#A).$$

$$\#\{f : \{1,2,\dots,n\} \to \{1,\dots,m\} \text{ tq } f \text{ es inyectiva}\}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n > m \\ P(m,n) & \text{si } n \leq m. \end{cases}$$

c. $\#\{f : \{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,m\} : f \text{ biyectiva}\}$

Def: $f : A \to B$ es una función sobreyectiva si $\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A$ tq $f(a) = b$.

Def: $f : A \to B$ es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

Obs: . si $f : A \longrightarrow B$ inyectiva $\Rightarrow \#A \leq \#B$

. si $f : A \longrightarrow B$ sobreyectiva $\Rightarrow \#A \geq \#B$

. si $f: A \to B$ es biyectiva

$\Rightarrow \underline{\#A = \#B}$

Def: Si $f: A \to B$, $\mathrm{Im}(f) = \{f(a) : a \in A\}$
$\subset B$.

Ejemplos: $A = \{1,2,3\}$
$B = \{1,2,3,4\}$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathrm{Im}(f) = \{1,2,4\} \\ \#\mathrm{Im}(f) = 3 = \#A \end{array}$$

⊛ Obs: Si $f: A \to B$ es inyectiva
entonces $\#\mathrm{Im}(f) = \#A$
$\mathrm{Im}(f) = \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\}$

Además, si $f: A \to B$ inyectiva
y $\#A = \#B \Rightarrow$ es sobreyectiva

$$\underbrace{\#B = \#A = \#\mathrm{Im}(f)}_{\hookrightarrow \text{ inyectiva}}$$

$\mathrm{Im}(f) \subset B$
$\#\mathrm{Im}(f) \leq \#B$

Si $X \subset Y$
X, Y conjuntos
finitos
$\Rightarrow \#X \leq \#Y$

$\Rightarrow \#\mathrm{Im}(f) = \#B$
$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = B$ y
es sobreyectiva.

Conclusión: Si tengo $f: A \to B$ y $\#A = \#B$
entonces f es biyectiva.

Entonces $f: \{1, \dots, \boxed{n}\} \to \{1, \dots, \boxed{n}\}$ es inyectiva
sii es biyectiva

$\# \{ f : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, m\} : f \text{ biyectiva} \}$

$$= \begin{cases} \frac{n!}{(m-n)!} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} = \begin{cases} \boxed{n!} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

(d) f es monótona creciente estrictamente. $f : A \to B$, $\exists\, A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$

<u>Def</u>: . f es monótona creciente
decreciente

si $f(a) \geq f(a')$ cuando $a \geq a'$ $a, a' \in A$
$\leq$

. f es monótona creciente estrictamente
decreciente

si $f(a) > f(a')$ cuando $a > a'$.
$<$

<u>Ejemplos</u>: . $f : \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$f(1) = 3$, $f(2) = 3$

$f(3) = 4$, $f(4) = 5$ es creciente

no es estrictamente creciente

ya que $\underline{2 > 1}$ pero $\underline{f(2) \not> f(1)}$

$a = 2$, $a' = 1$ $a \geq a'$

$\left. \begin{array}{l} f(a) = 3 \\ f(a') = 3 \end{array} \right\}$ $f(a) \geq f(a')$ ✓

. $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 5$

<u>es estrictamente</u> creciente.

. $f(1) = 3$, $f(2) = 4$ ó 5,

$f(3) = 5$, $f(4) = \times$

no hay función estr. creciente.

Si es estrictamente creciente $\Rightarrow$ es inyectiva.

Si $\boxed{a \neq a'}$ tengo dos opciones:

$$a < a' \rightsquigarrow f(a) < f(a') \rightsquigarrow \boxed{f(a) \neq f(a')}$$

$$a' < a \rightsquigarrow f(a') < f(a) \rightsquigarrow \boxed{f(a') \neq f(a')}$$

Si $f:\{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,m\}$ es estrictamente creciente $\Rightarrow$ es inyectiva $\Rightarrow \boxed{n \leq m}$

si $n > m \Rightarrow$ no hay $f:\{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,m\}$ estrictamente creciente.

- si $n = m$, $f:\{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ estr. creciente $\Rightarrow f(1)=1, f(2)=2, \dots, f(n)=n$
  hay una sola función de ese tipo

- si $\underline{n=2,\ m=3}$

$$1\ \left(\begin{array}{l} f(1)=1 \\ f(2)=2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{l} f(1)=2 \\ f(2)=3 \end{array}\right) 2 \qquad 3\ \left(\begin{array}{l} f(1)=1 \\ f(2)=3 \end{array}\right)$$

encontramos 3 funciones

1: x x _
2: _ x x
3: x _ x

- si $n=3$, $m=4$, hay ___ funciones estrictamente crecientes

x x x _ | x _ x x
x x _ x | _ x x x

$1 \leq f(1) < f(2) < f(3) \leq 4$

En general, si $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ estr. creciente

x_1 la cantidad de elementos $< f(1)$

x_2 la cantidad de elementos b / $f(1) < b < f(2)$

x_3 la cantidad de elementos b / $f(2) < b < f(3)$

$\vdots$

x_n la cantidad de elementos b / $f(n-1) < b < f(n)$

x_{n+1} la cantidad de elementos b / $b > f(n)$.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = (m - n)$$