Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Matemática Discreta 1

Primer parcial - 6 de mayo de 2024.

N° de parcial	Cédula	Nombre y apellido	Salón

IMPORTANTE

- La duración del parcial es de 3 horas.
- El parcial es individual, cualquier copia será denunciada en el Consejo de facultad.
- No se permite utilizar calculadora ni material de consulta.
- En cada ejercicio de múltiple opción hay una sola opción correcta.
- La comprensión de la letra de los ejercicios es parte de la prueba.
- Notaciones: $A_n^m = P(m,n)$; $C_n^m = C(m,n) = \binom{m}{n}$, $CR_n^m = CR(m,n)$; $S(m,n)$ es el número de Stirling.

LO ÚNICO QUE SE CORREGIRÁ SERÁ LO REGISTRADO EN ESTOS CASILLEROS

Respuestas Verdadero o Falso: rellenar con **V** o **F**				
VF1	VF2	VF3	VF4	VF5

Correcta: 2 puntos. Incorrecta: -1 punto.
Sin responder: 0 puntos.

Respuestas múltiple opción: rellenar con **A**, **B**, **C** o **D**				
MO1	MO2	MO3	MO4	MO5

Correcta: 6 puntos. Incorrecta: -1 punto.
Sin responder: 0 puntos.

Verdadero o Falso

1. La cantidad de soluciones de la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r, \quad \text{es} \quad C_r^{n+r-1}$$

con $x_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, ..., n$, para todo $r \in \mathbb{N}$.

2. En el desarrollo de $(x+2y+1)^8$ el coeficiente de x^6y es 56.

3. La cantidad de desórdenes de 5 elementos distintos es 44.

4. Para todo $m, n \in \mathbb{N}$ se cumple $CR_n^m = CR_{m-n}^m$.

5. $\mathrm{Sob}(7,5) + \mathrm{Sob}(7,6) = \mathrm{Sob}(8,6)/6$.

Múltiple Opción

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$P(n)$

1. En un ejercicio de un examen se considera analizar la propiedad $2^n \geq n^2$, con $n \in \mathbb{N}$, utilizando Inducción Completa. Se obtuvieron las siguientes respuestas:

Clodomiro: La propiedad es cierta porque vale para $n = 0$ y el paso inductivo:

$$2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2, \text{ vale para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Duvija: Si bien el paso inductivo:

$$2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2, \text{ vale para todo } n \in \mathbb{N},$$

la propiedad vale sólo para $n \geq 4$, pues falla en $n = 3$.

$P(n) = 2^n \geq n^2$

Begoña: El paso inductivo:

$\boxed{2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2}$ vale para todo $n \in \mathbb{N}, n \neq 2$ ~~y se verifica que la propiedad~~ vale para $n = 4$. Entonces es cierta para todo $n \geq 4$. Además se puede verificar que también vale para $n = 0, 1$ y 2.

Agrippina: La propiedad vale para todo $n \in \mathbb{N}$ porque vale para $n = 0$ y vale el paso inductivo:

$$2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^n + 1 \geq n^2 + 1, \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

La respuesta correcta la escribió:

A) Agrippina **B)** Begoña **C)** Clodomiro **D)** Duvija

2. La cantidad de palabras de largo 7 con letras de la palabra PALADINES que tienen dos A seguidas o ninguna A es:

A) $4 \cdot 7!$ **B)** $8!$ **C)** $2 \cdot 7!$ **D)** $7!$

3. Sea C un cubo de volumen 8 cm^3 y n el mínimo natural tal que podemos asegurar que si seleccionamos n puntos cualesquiera en C, entonces hay dos entre los seleccionados que están a distancia menor o igual a $\sqrt{3}$ (que es la medida de la diagonal de un cubo de volumen 1 cm^3). Entonces:

A) $n = 7$ **B)** $n = 8$ **C)** $n = 9$ **D)** $n = 10$

4. La cantidad de palabras de largo 8 que se pueden formar usando **todas** las letras de la palabra PATOS (se pueden repetir letras) es:

A) A_5^8 **B)** $5^8 - 5 \cdot 4^8$ **C)** CR_8^5 **D)** $\mathrm{Sob}(8,5)$

5. Tenemos catorce pelotitas numeradas del 1 al 14, dos de las cuales son de color blanco y doce son de color celeste. Queremos distribuirlas en seis montones, no vacíos y de forma que en cada montón no haya pelotitas de distinto color (se entiende que los montones son recipientes indistinguibles). ¿De cuántas formas se las puede distribuir?

A) $A_1^6 \cdot S(12,5) + A_2^6 \cdot S(12,4)$
B) $C_1^6 \cdot S(12,5) + C_2^6 \cdot S(12,4)$
C) $S(12,5) + S(12,4)$
D) $\mathrm{Sob}(12,5) + \mathrm{Sob}(12,4)$

$Sob(n,r) = \#\{f: A \to B : \text{sobre}\}$

$\#A = n,\ \#B = r.$

$= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i C_i^r (r-i)^n$

$=$ # maneras de distribuir n objetos distintos en r recipientes numerados y que ninguno quede vacío.

$S(n,r) =$ # maneras de distribuir n objetos distintos en r recipientes indistinguibles y que ninguno quede vacío.

$= Sob(n,r)/r!$

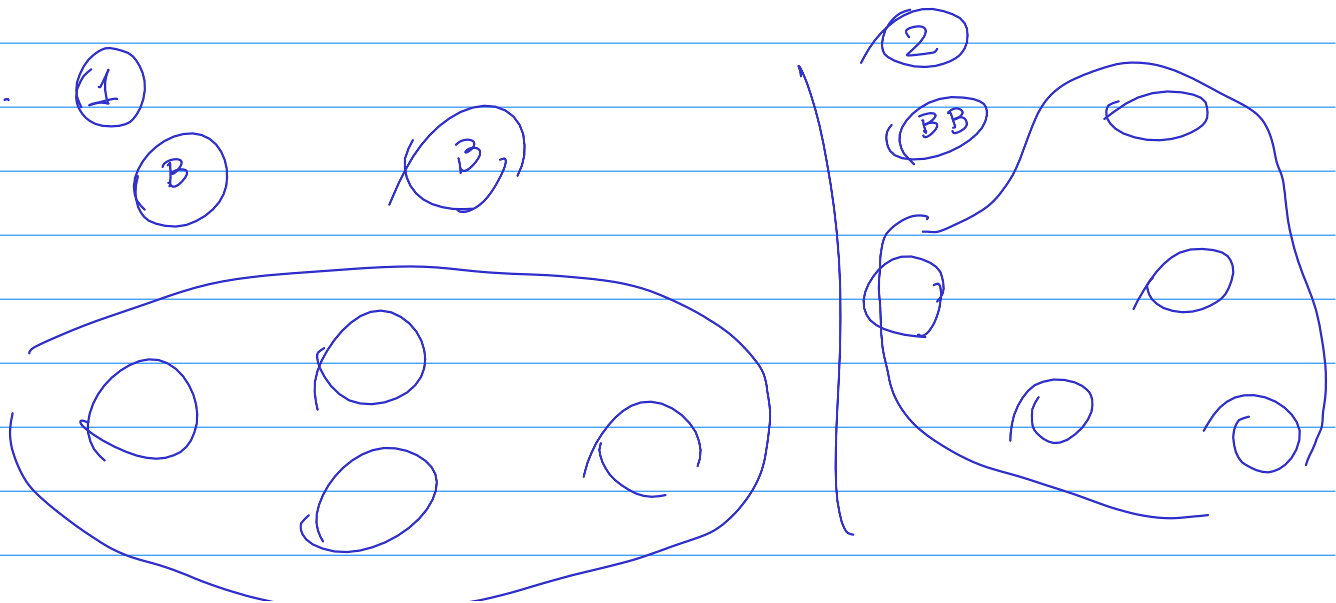
P, A, T, O, S

PATTOOSS $\longleftrightarrow$ $f: \{1, 2, \ldots, 8\} \longrightarrow \{P, A, T, O, S\}$

$f(1) = P,\ f(2) = A,\ f(3) = T,\ \ldots,\ f(8) = S.$

En este caso los recipientes son las letras y los objetos son los lugares donde irían esas letras. $\Rightarrow$ la sol. es $Sob(8,5)$.

5.



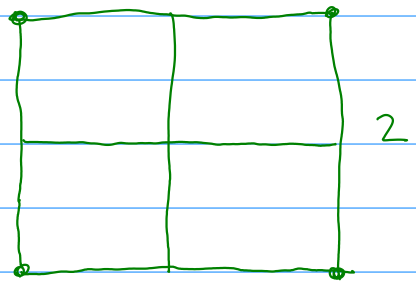
En la opción (1) tenemos que distribuir 12 pelotitas numeradas en 4 recip. indist.
$S(12,4)$

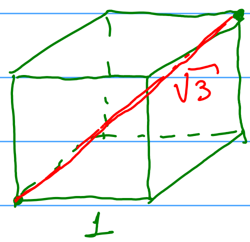
En la opción (2) ...

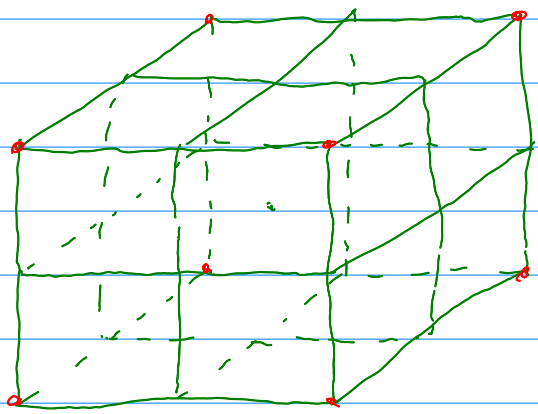
... 5 recip. indist.

$S(12,5)$

Total : $S(12,4)+S(12,5)$.







$V(C)=\ell^3$

ℓ = lado de C

$2>\sqrt{3}>1$

$\Updownarrow$

$4>3>1$

Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 7
Relaciones de Recurrencia I

Ejercicio 1. Resolver las relaciones de recurrencia:

(a) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$ con $a_0 = 1, a_1 = 3$.

(b) $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$ con $b_0 = 5, b_2 = 27$.

(c) $c_{n+2} + 4c_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$ con $c_0 = c_1 = 1$.

Ejercicio 2. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n = 0, \quad n \geqslant 0$.

(b) $a_n - na_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 1$.

(c) $na_n - (n-1)a_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 2$.

(d) $a_n/a_{n-1}^p = 2$, siendo $a_0 = 1$, p positivo diferente de 1.

Ejercicio 3. Expresar a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leqslant n-1$) siendo a_n:

(a) La cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunión.

(b) El número de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.

(c) El número de secuencias de largo n de letras A, B y C que no tienen la letra A dos veces seguidas.

(d) La cantidad de formas de subir una escalera de n escalones si se pueden subir de a uno o de a dos en cada paso.

(e) Lo anterior pero sin que se puedan saltar dos veces seguidas un escalón (o sea, que si se saltea un escalón, entonces el siguiente no se saltea).

(f) El número de secuencias de unos y doses que suman n. Por ejemplo, para $n = 3$ son 3 secuencias en total: 111, 12 y 21.

Ejercicio 4. Se pretende diseñar una bandera con n franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Hallar la cantidad de banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

(a) No hay restricciones sobre el color de cada franja.
(b) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.
(c) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color, como tampoco pueden serlo la primera y la última franjas.

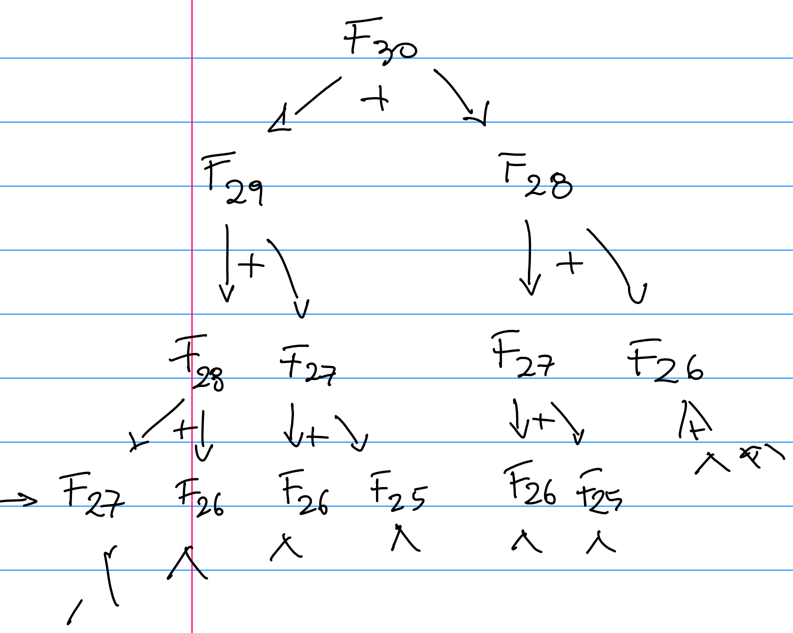
Ej: Sucesión de Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = \underbrace{F_{n+1} + F_n}_{\text{grado } 2} \quad \forall\ n \geq 0 \end{cases}$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3+2 = 5$$
$$F_4 = F_3 + F_2 = 2+1 = 3$$
$$F_3 = F_2 + F_1 = 1+1 = 2$$
$$F_2 = F_1 + F_0 = 1+0 = 1$$

```
sage: def fib(n):
....:     if n == 0:
....:         return(0)
....:     elif n == 1:
....:         return(1)
....:     else:
....:         return(fib(n-1) + fib(n-2))
```

← usando esa implementación la función fib cuando quiere calcular en 30 llama a fib en 29 y 28



la cantidad de sumas que hay que hacer es aprox $2^{30} \approx 10^9$

$2^{100} \approx 1.2 \cdot 10^{30}$

```
sage: def fib_aux(n):
....:     if n == 0:
....:         return([0])
....:     elif n == 1:
....:         return([0, 1])
....:     else:
....:         L = fib_aux(n-1)
....:         return(L + [L[-2]+L[-1]])
```

fib_aux(30)

↓

fib_aux(29)

↓

fib_aux(28)

↓

fib_aux(27)

⋮

↓

fib_aux(1)