3. $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2$, del ejercicio 1 sabemos que

(1) $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Queremos ver que $$\boxed{\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

PB $(n=0)$ ✓

HI : $\sum_{i=0}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ ← asumimos

TI : $\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4}$ ← queremos probar

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \sum_{i=0}^{k} i^3 + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2 \cdot (k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 \left(k^2 + 4(k+1)\right)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}$$ ✓

Lo podemos probar de otra manera:

$\underline{PB}$ $(n=0)$ $\quad \sum_{i=0}^{0} i^3 = 0 = \left(\sum_{i=0}^{0} i\right)^2 = 0$ ✓

$\underline{HI}$: $\quad \displaystyle\sum_{i=0}^{k} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{k} i\right)^2$

$\underline{TI}$: $\quad \displaystyle\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{k+1} i\right)^2$

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \sum_{i=0}^{k} i^3 + (k+1)^3$$

$$\underset{HI}{=} \underline{\left(\sum_{i=0}^{k} i\right)^2 + \boxed{(k+1)^3}}$$

$$\left(\sum_{i=0}^{k+1} i\right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{k} i + (k+1)\right)^2$$

$$= \underline{\left(\sum_{i=0}^{k} i\right)^2 + \boxed{2\left(\sum_{i=0}^{k} i\right)\cdot(k+1) + (k+1)^2}}$$

Podriamos probar por inducción que

$$(k+1)^3 = 2\left(\sum_{i=0}^{k} i\right)(k+1) + (k+1)^2$$

$$\iff (k+1)^2 = 2\sum_{i=0}^{k} i + (k+1)$$

$$\iff \quad k^2 + \cancel{2}k + \cancel{1} = 2\sum_{i=0}^{k} i + \cancel{k} + \cancel{1}$$

$$\iff \quad \sum_{i=0}^{k} i = \frac{k^2 + k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$$

5. $2^n \geq n^2$

$n=0$: $2^0 = 1$ ✓
$0^2 = 0$

$n=1$: $2^1 = 2$ ✓
$1^2 = 1$

$n=2$: $2^2 = 4$ ✓
$2^2 = 4$

$n=3$: $2^3 = 8$ ✗
$3^2 = 9$

$n=4$: $2^4 = 16$ ✓
$4^2 = 16$

$n=5$: $2^5 = 32$
$5^2 = 25$

$n=6$: $2^6 = 64$
$6^2 = 36$

$\vdots$

Quiero ver que si $\boxed{2^k \geq k^2}$ con $\underline{k \geq 4}$

$\Rightarrow 2^{k+1} \geq (k+1)^2$

$\times 2 > 0$

$$2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot k^2 \overset{?}{\geq} (k+1)^2$$
$$= k^2 + 2k + 1$$

$$2 \cdot k^2 = k^2 + k^2$$

Tratemos de probar primero que $\boxed{k^2 \geq 2k+1}$

Recordar:
si $a \geq b$
$\exists\ x > 0$
$\Rightarrow x \cdot a \geq x \cdot b$
si $x < 0$
$\Rightarrow x \cdot a \leq x \cdot b$

$$k^2 = k \cdot k \geq 4 \cdot k = (2+2) \cdot k = 2k + 2k \geq 2k + 1$$

$$k \geq 4 \Rightarrow 2k \geq 8 \geq 1 \Rightarrow \boxed{2k \geq 1}$$

Ejercicio 6. Probar que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural n.

Def: $\mathbb{Z} \ni x$ es múltiplo de $a \in \mathbb{Z}$ si $\exists\ b \in \mathbb{Z}$ tal que $\boxed{x = a \cdot b}$

Queremos ver que todo $n \in \mathbb{Z}$ $\exists\ b \in \mathbb{Z}$ tal que $7^n - 2^n = 5 \cdot b$

PB: $7^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ ✓

HI: $7^k - 2^k = 5 \cdot b$

$$7^{k+1} - 2^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k$$

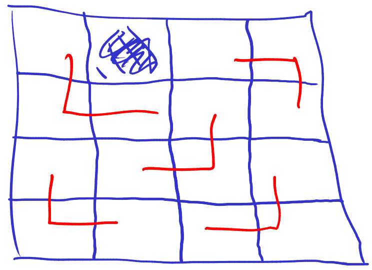
$$= (5+2) \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k$$

$$= 5 \cdot 7^k + 2\underbrace{(7^k - 2^k)}_{5 \cdot b}$$

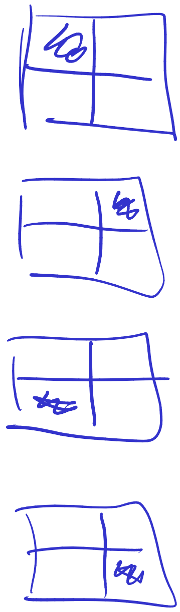
$$= 5 \cdot (7^k + 2 \cdot b).$$

8

n = 2 :

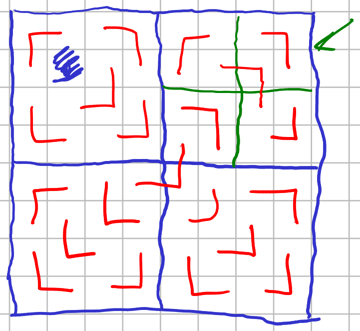


n = 1 :



n=3

$n=3$ $\qquad 2^3 \times 2^3 = 8 \times 8$



Ejercicio 11. Probar que todo número natural mayor que 1 se puede expresar como producto de números primos.

Def: $n \in \mathbb{N}$, m es divisor de n si $\exists\, q$ tq $n = m \cdot q$, también se dice que m divide a n y se denota $m \mid n$

obs 1: $1 \mid n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \mid n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

obs 2: si $m \mid n \Rightarrow \boxed{m \leq n}$

Def: $p \in \mathbb{N}$ es primo si $p > 1$ y los únicos divisores de p son 1 y p

Def: $n \in \mathbb{N}$ es compuesto si $n > 1$ y no es primo.

obs: si n es compuesto $\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{N}$ $a \neq 1, n$ tq $a \mid n$ $\Rightarrow 1 < a < n$

$n = a \cdot q$ también se cumple $1 < q < n$

$\boxed{12} = 3 \cdot 4$ es compuesto

$1 < 3 < 12$

$1 < 4 < 12$

Inducción fuerte:

si P prop. / $P(0)$ verdadero
$P(n_0)$

y $P(0), P(1), \dots, P(k)$ verdadero
$P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(k)$

implica $P(k+1)$ verdadero, para todo $k \in \mathbb{N}$
$k \geq n_0$

entonces $P(n)$ " " " $n \in \mathbb{N}$
$n \geq n_0$

Ej 11: PB: $(n=2)$ 2 es primo
es producto de primos

HI: se cumple para
$2 \leq a \leq k$

TI: se cumple para $k+1$.

Dos casos: ① $k+1$ es primo
$\Rightarrow$ es producto de
primos

② si $k+1$ compuesto
$\Rightarrow k+1 = a \cdot b$ con $1 < a < k+1$
$1 < b < k+1$

$\iff$ $2 \leq a \leq k$ por HI $a = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$,
$2 \leq b \leq k$ $b = p_1' \cdot p_2' \cdots p_t'$

$\Rightarrow \quad k+1 = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \cdot p_1' \cdot p_2' \cdots p_t'$

$\Rightarrow$ $k+1$ es producto de primos.