

PRÁCTICO 10
 Relaciones I

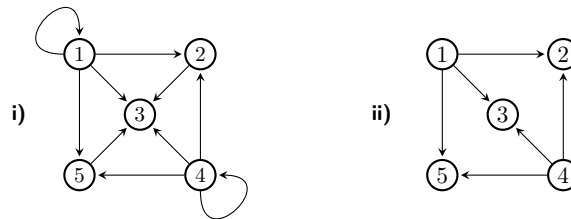
Aclaración: En todos los ejercicios:

- R^{-1} denota la relación inversa, o sea $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$;
- \bar{R} la relación complementaria, o sea, $\bar{R} = \{(x, y) : (x, y) \notin R\}$
- RS el producto de las relaciones R y S (denotado como $R \circ S$ en el libro de Grimaldi), o sea $RS = \{(x, z) : \exists y, (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in S\}$.

Ejercicio 1. Determine si las siguientes relaciones son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas ($(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$) o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

- a. $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.
 b. $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$. d. $R = \emptyset$.
 c. $R = \{(1, 3), (1, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\}$. e. $R = A \times A$.

Ejercicio 2. Determine si las relaciones siguientes son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, donde cada relación se representa en un grafo dirigido (o digrafo):



Ejercicio 3. Considere el conjunto de propiedades $P = \{\text{reflexiva, simétrica, transitiva}\}$. Para cada subconjunto T de P , encuentre una relación que cumpla las propiedades de T y no cumpla las de $P \setminus T$.

Ejercicio 4. Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

- a. Elabore un criterio para decidir si R es o no *simétrica* basándose en la representación de la relación en grafos dirigidos.
 b. Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también \bar{R} , R^{-1} , RS , $R \cup S$, $R \cap S$?
 c. Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexiva*, *antisimétrica*, *asimétrica* y *transitiva*.

Ejercicio 5.

- (a) Determinar la cantidad de relaciones R que se pueden definir sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$.
 (b) Construir el diagrama de flechas (o digrafo) de alguna de estas relaciones.

Ejercicio 6. ¿Cuántas relaciones binarias

(a) reflexivas, (b) simétricas, (c) antisimétricas;

son definibles sobre un conjunto con n elementos?

Ejercicio 7. Sea A un conjunto con n elementos y R una relación sobre A . Considere cada una de las siguientes proposiciones. Demuéstrela en caso que sea verdadera y encuentre un contraejemplo en el caso que sea falsa.

a. Si R es reflexiva sobre A , entonces $\#R \geq n$.

b. Si $\#R \geq n^2 - k$, con $k < n$ entonces existe $a \in A$ tal que $(a, a) \in R$.

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir las clases de equivalencia de la relación:

(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

(b) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es un número par.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es múltiplo de 10.

(d) $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

Ejercicio 9. Probar que si R es una relación en A que es simétrica y transitiva, tal que para todo a en A existe algún elemento b en A tal que aRb , entonces R es una relación de equivalencia en A .

Ejercicio 10. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia definidas en $\{1, 2, 3\}$.

Ejercicio 11. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que tienen exactamente 3 clases de equivalencia.

Ejercicio 12. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea R_n la cantidad de relaciones de equivalencia que pueden definirse en un conjunto con n elementos. Para cada $n, i \in \mathbb{N}$ sea $S(n, i)$ el número de Stirling del segundo tipo. Probar que:

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + \cdots + C_n^n R_0$.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $R_n = S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n, n)$

Ejercicio 13. Demuestre o halle un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

a. El producto de dos relaciones puede ser una función sin que ninguna de ellas lo sea.

b. La inversa de una relación puede ser una función sin que ella misma lo sea.

c. El producto de dos relaciones puede dar la relación vacía sin que ninguna de ellas lo sea

Ejercicio 6. ¿Cuántas relaciones binarias

(a) reflexivas, (b) simétricas, (c) antisimétricas;

son definibles sobre un conjunto con n elementos?

Ejercicio 7. Sea A un conjunto con n elementos y R una relación sobre A . Considere cada una de las siguientes proposiciones. Demuéstrela en caso que sea verdadera y encuentre un contraejemplo en el caso que sea falsa.

a. Si R es reflexiva sobre A , entonces $\#R \geq n$.

b. Si $\#R \geq n^2 - k$, con $k < n$ entonces existe $a \in A$ tal que $(a, a) \in R$.

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir las clases de equivalencia de la relación:

(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

(b) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es un número par.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es múltiplo de 10.

(d) $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

Ejercicio 9. Probar que si R es una relación en A que es simétrica y transitiva, tal que para todo a en A existe algún elemento b en A tal que aRb , entonces R es una relación de equivalencia en A .

Ejercicio 10. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia definidas en $\{1, 2, 3\}$.

Ejercicio 11. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que tienen exactamente 3 clases de equivalencia.

Ejercicio 12. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea R_n la cantidad de relaciones de equivalencia que pueden definirse en un conjunto con n elementos. Para cada $n, i \in \mathbb{N}$ sea $S(n, i)$ el número de Stirling del segundo tipo. Probar que:

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + \cdots + C_n^n R_0$.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $R_n = S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n, n)$

Ejercicio 13. Demuestre o halle un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

a. El producto de dos relaciones puede ser una función sin que ninguna de ellas lo sea.

b. La inversa de una relación puede ser una función sin que ella misma lo sea.

c. El producto de dos relaciones puede dar la relación vacía sin que ninguna de ellas lo sea

Relaciones

Def

Sean A, B dos conjuntos, $R \subset A \times B$

decimos que es una relación entre A y B .

Ej: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{8, 9\}$

$R = \{(1, 8), (2, 9), (1, 9)\} \rightarrow 1R8, 2R9, 1R9$

Si $(a, b) \in R$ decimos que a está relacionado con b y escribimos aRb .

Nos interesa cuando $A=B$.

Def 1: $R \subset A \times A$ es una relación reflexiva
si $aRa \forall a \in A$.

o sea: $(a, a) \in R \forall a \in A$.

Def 2: $R \subset A \times A$ " " " simétrica

si cuando $aRb \Rightarrow bRa$,

o sea: si $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.

Def 3: $R \subset A \times A$ " " " transitiva

si cuando aRb y $bRc \Rightarrow aRc$

o sea: si $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

Def 4: $R \subset A \times A$ " " " ant, simétrica

si cuando $a \neq b$ y $a R b \rightarrow b \not R a$
o sea: si $a \neq b$, $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$.

Ejercicio 1. Determine si las siguientes relaciones son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas $((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R)$ o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

- a. $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.
b. $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$. d. $R = \emptyset$.
c. $R = \{(1, 3), (1, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\}$. e. $R = A \times A$.

a. $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.

Como $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R$

$\Rightarrow R$ es reflexiva.

Es simétrica ya que cualquier $(a, b) \in R$ también $(b, a) \in R$.

$(1, 2), (2, 1) \in R$ para que sea transitiva tiene que pasar $(1, 1) \in R$

$(3, 4), (4, 3) \in R$ " " $(3, 3) \in R$

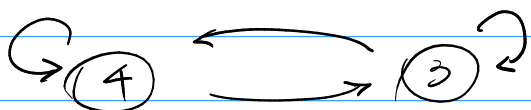
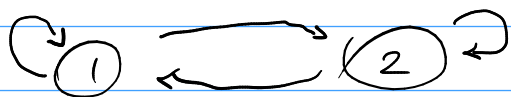
$(4, 3), (3, 4) \in R$ " " $(4, 4) \in R$

$(1, 1), (1, 2) \in R$ " " $(1, 2) \in R$

Es transitiva ya que para todos los $(a, b), (b, c) \in R$ también $(a, c) \in R$

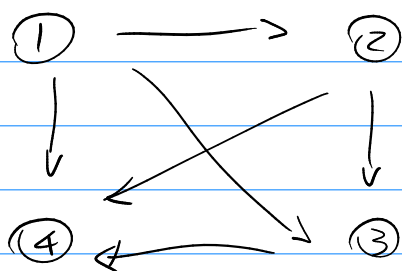
No es antisimétrica.

La relación se puede representar como



por cada par (a, b) dibujamos una flecha entre a y b

b. $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.



Reflexiva NO
falten los elementos $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$

simétrica NO
 $(1, 2) \in R$ pero $(2, 1) \notin R$

transitiva si

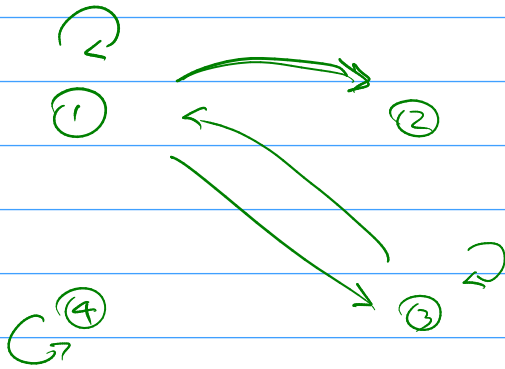
antisimétrica si

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$



- reflexiva ✓
- simétrica ✓
- transitiva ✓
- antisimétrica ✓

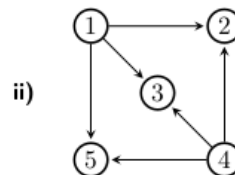
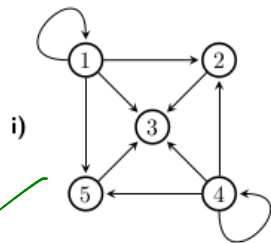
c. $R = \{(1, 3), (1, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.



- reflexiva NO
falta el $(2, 2)$
- simétrica NO
falta $(2, 1)$
- transitiva NO
falta $(3, 2)$
- antisimétrica NO

$(3, 1), (1, 2) \in R$ pero $(3, 2) \notin R$

Ejercicio 2. Determine si las relaciones siguientes son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, donde cada relación se representa en un grafo dirigido (o digrafo):



$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3)\}$

- i
- refl. NO
 - sim. NO
 - trans. Si
 - antisim. Si
 - asim. NO

- ii
- refl. NO
 - sim. NO
 - trans. Si
 - antisim. Si
 - asim. Si

R no es transitiva si $\exists (a, b) \in R$
 $(b, c) \in R$
además $(a, c) \notin R$

Ejemplo de la vida real:

$A = \text{países}$

$R = \{ (a, b) : \text{hay un vuelo entre el país } a \text{ y el país } b \}$

$(\text{Uruguay}, \text{Argentina}) \in R$

$(\text{Argentina}, \text{Uruguay}) \in R$

$(\text{Uruguay}, \text{Australia}) \notin R$