Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 3: Combinatoria II

Ejercicio 1.

(a) ¿Cuántas fichas diferentes hay en el juego popular del dominó?

(b) ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al arrojar 3 dados idénticos?

Ejercicio 2. Un comité de 12 personas debe elegir de entre sus miembros un presidente, un secretario, y un tesorero. ¿De cuántas formas puede hacerse esto?

Ejercicio 3. ¿De cuántas formas es posible hacer una partición de un conjunto de $2n$ elementos, en n conjuntos de 2 elementos?

Ejercicio 4. Considerar la suma: $\sum_{i=0}^{i=n} C_m^i$.

a. Calcular la suma para algunos casos, usando el triángulo de Pascal.
Aclaración: si $i < m$ asumimos $C_m^i = 0$.

b. Conjeture cuánto suma en general y demuéstrelo por Inducción Completa.

Ejercicio 5. Hallar la cantidad de maneras de distribuir r pelotas idénticas en n cajas diferentes.

Ejercicio 6.

(a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 personas en 12 sillas puestas en línea?

(b) Ídem pero las personas no deben quedar sentadas en asientos contiguos.

Ejercicio 7. ¿De cuántas formas puede distribuir un maestro 8 bizcochos de chocolate y 7 de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

Ejercicio 8. Usando que $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, probar que:

$$\sum_{i=0}^{i=n} (C_i^n)^2 = C_n^{2n}.$$

Ejercicio 6.

(a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 personas en 12 sillas puestas en línea?

(b) Ídem pero las personas no deben quedar sentadas en asientos contiguos.

a. C^{12}_{5}

b. Ejemplo

$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2,\ x_5 = 2,\ x_6 = 0$

_ P _ P _ P _ _ P _ _ P

Sea x_1 la cantidad de espacios vacíos antes de la primer persona

Sea x_2 " " " " entre la primer persona y la segunda

Sea x_3 " " " " segunda " " tercera

x_4 tercera cuarta

x_5 " " cuarta quinta

x_6 luego de la quinta persona

y $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 7$

además $x_1 \geq 0,\ x_6 \geq 0$

$$\boxed{\begin{array}{c} x_2 \geq 1 \\ x_3 \geq 1 \\ x_4 \geq 1 \\ x_5 \geq 1 \end{array}}$$

En teó vimos que si $x_i \geq 0$

la # de sols es $CR(6,7) = C(6+7-1,7)$

Consideramos lo siguiente

$$\underset{x_1'}{\overset{\shortparallel}{x_1}} + \underbrace{(x_2 - 1)}_{x_2'} + \underbrace{(x_3 - 1)}_{x_3'} + \underbrace{(x_4 - 1)}_{x_4'} + \underbrace{(x_5 - 1)}_{x_5'} + \underset{x_6'}{\overset{\shortparallel}{x_6}} = 3$$

y se cumple que $\boxed{x_i' \geq 0}$

sols de $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 7$ con $x_1 \geq 0, x_6 \geq 0$
$x_2 \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1$
$x_5 \geq 1$

es igual a # sols de

$x_1' + x_2' + x_3' + \cdots + x_6' = 3$ con $x_i' \geq 0$

que es $CR(6,3) = C(6+3-1, 3) = \dfrac{8!}{3!\,5!} = \dfrac{\cancel{6}\cdot 7 \cdot 8}{\cancel{3!}}$

$= 7 \cdot 8 = 56$

Ejercicio 7. ¿De cuántas formas puede distribuir un maestro 8 bizcochos de chocolate y 7 de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

bizcochos al primer est
bizcochos al 2do
" 3er

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8 + 7 = 15$$

$$\underbrace{(x_1 - 2)}_{\geq 0} + \underbrace{(x_2 - 2)}_{\geq 0} + \underbrace{(x_3 - 2)}_{\geq 0} = 5 + 4$$

$$CR(3,9) = C(9+3-1, 9)$$
$$= C(11,9) = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55.$$

La cantidad de maneras de tomar, con rep, r objetos de n objetos distintos es

$$CR(n,r) = C(n+r-1, r) = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

Y es lo mismo que la cantidad de soluciones que

$$\boxed{x_1 + \cdots + x_n = r \quad \text{con } x_i \geq 0, \; x_i \in \mathbb{N}}$$

Ejercicio 8. Usando que $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, probar que:

$$\sum_{i=0}^{i=n} (C_i^n)^2 = \boxed{C_n^{2n}.}$$

La idea es usar el Teo del Binomio

$$(1+x)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} C_i^{2n} x^i \cdot 1^{n-i} = \sum_{i=0}^{2n} C_i^{2n} x^i$$

$$1^{n-i} = 1$$

C_n^{2n} aparece multiplicando a x^n en el desarrollo de $(1+x)^{2n}$.

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} C_j^n x^j$$

$$(1+x)^n \cdot (1+x^n) = \left(\sum_{j=0}^{n} C_j^n x^j\right)\left(\sum_{j=0}^{n} C_j^n x^j\right)$$

$$= \left(C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n\right)\left(C_0^n + C_1^n x + \cdots + C_n^n x^n\right)$$

$$= C_0^n \cdot C_0^n + C_0^n C_1^n x + C_0^n C_2^n x^2 + \cdots + \boxed{C_0^n C_n^n x^n} +$$

$$C_1^n x \cdot C_0^n + C_1^n x C_1^n x + C_1^n x C_2^n x^2 + \cdots + C_1^n x C_n^n x^n +$$

$$C_2^n x^2 \cdot C_0^n + C_2^n x^2 C_1^n x + C_2^n x^2 C_2^n x^2 + \cdots + C_2^n x^2 C_n^n x^n +$$

$$\vdots$$

$$+$$

$$C_n^n x^n \cdot C_0^n + C_n^n x^n C_1^n x + C_n^n x^n C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n C_n^n x^n$$

En cada fila de la suma aparece un x^n, en la fila i-esima aparece $x^i \cdot x^{n-i}$ y el coeficiente que la multiplica es $C_i^n \cdot C_{n-i}^n$

y tomando factor común x^n en toda la sumatoria obtenemos el coeficiente

$$C_0^n \cdot C_n^n + C_1^n \cdot C_{n-1}^n + C_2^n C_{n-2}^n + \cdots + C_n^n \cdot C_0^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_i^n C_{n-i}^n = \sum_{i=0}^{n} \left(C_i^n\right)^2$$

$$C_i^n = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n!}{(n-i)!\,(n-(n-i))!} = C_{n-i}^n$$

El coef. de x^n en la izquierda es $\sum_{i=0}^{n} \left(C_i^n\right)^2$ el coef de x^n a la derecha es C_n^{2n} $\Rightarrow$ $\boxed{\sum_{i=0}^{n} \left(C_i^n\right)^2 = C_n^{2n}}$