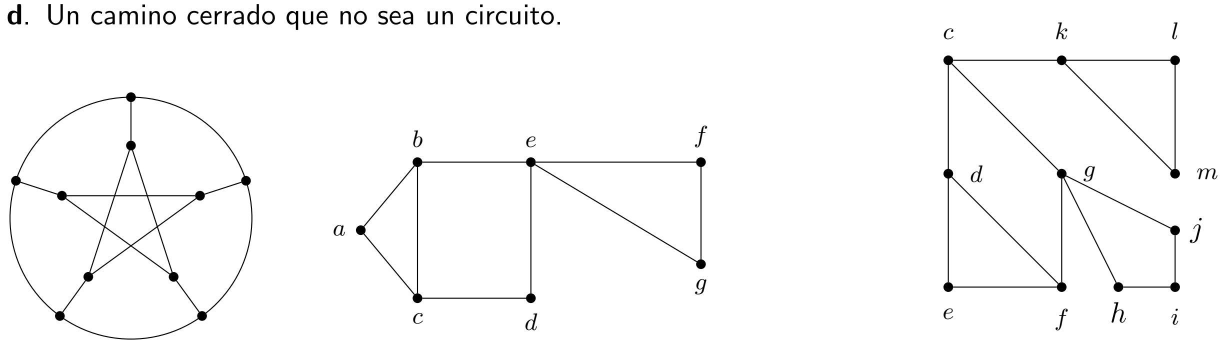
**Universidad de la República** | **Matemática Discreta 1**
**Facultad de Ingeniería**
**Instituto de Matemática y Estadística** | **Primer semestre 2024**

# PRÁCTICO 12
## Grafos I

**Ejercicio 1.** Para el grafo de la Figura 1 (ii), determine:

- **a**. Un camino abierto que no sea un recorrido.
- **b**. Un recorrido que no sea camino simple.
- **c**. Un camino simple de $b$ a $d$ de longitud $3$.
- **d**. Un camino cerrado que no sea un circuito.
- **e**. Un circuito que no sea un ciclo.
- **f**. Todos los ciclos que pasan por $b$.
- **g**. Todos los caminos simples de $b$ a $f$.




(i) Grafo de Petersen (ii) (iii)

Figura 1:

**Ejercicio 2.**

- **a**. ¿Cuál es la distancia entre el vértice $d$ y los demás vértices del grafo de la Figura 1 (iii)?
- **b**. Halle el diámetro de $K_n$, $K_{n,m}$, $P_n$, $C_n$ y del grafo de Petersen (Figura 1(i)).
- **c**. ¿Cuántos caminos simples tienen $P_n$ y $K_{1,n}$?

**Ejercicio 3.** ($1^{\text{er}}$ parcial 2017) Sean $x$ e $y$ dos vértices adyacentes de $C_{20}$.
¿Cuántos caminos de largo 11 empiezan en $x$ y terminan en $y$?

**Ejercicio 4.** ¿Cuántos caminos de largo $n$ hay entre dos vértices opuestos de $C_4$?

**Ejercicio 5.** Para cada natural $n \geq 3$ se define el grafo *rueda de* $n$ *rayos* como el grafo $W_n$ con $n+1$ vértices $v_0$, $v_1$, …, $v_n$, tal que $v_0$ es adyacente a todos los demás vértices y $v_1, \ldots, v_n, v_1$ es un ciclo. En la Figura 2 se muestra $W_3$, $W_4$ y $W_5$.

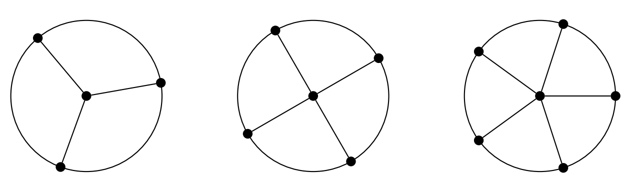


Figura 2:

**a**. ¿Cuántas aristas tiene $W_n$?

**b**. ¿Cuántos 3-ciclos tiene $W_3$? ¿y $W_4$?

**c**. ¿Cuántos 4-ciclos tienen $W_3$, $W_4$ y $W_5$?

**d**. Ídem para 5-ciclos.

**e**. Ídem para 6-ciclos.

**f**. Determine cuántos $k$-ciclos tiene $W_n$.

**Ejercicio 6.** Pruebe que dos caminos simples de la mayor longitud posible, en un grafo conexo, poseen un vértice en común.

**Ejercicio 7.** Sea $G$ el grafo con conjunto de vértices $\{1, 2, \ldots, 15\}$ donde el vértice $i$ es adyacente al $j$ si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. ¿Cuántas componentes conexas tiene $G$?

**Ejercicio 8.** Encuentre un grafo $G$ que tenga tres vértices $u$, $v$ y $w$ tales que

$$\kappa(G-u) = \kappa(G), \qquad \kappa(G-v) > \kappa(G), \qquad \kappa(G-w) < \kappa(G).$$

**Ejercicio 9.** Un hombre debe cruzar un perro, una oveja y una bolsa de repollos, a la otra margen del río, por medio de una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez. Además, no se puede dejar al perro sólo con la oveja ni a la oveja sola con la bolsa de repollos.

**a**. ¿Cómo se podrá hacer?

**b**. ¿Puede el hombre realizar el proceso si ha de hacer exactamente 20 viajes? (Un viaje es ir de una margen del río a la otra).

*Sugerencia:* asociar a cada disposición factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un solo viaje.

**Ejercicio 10.** Sea $G$ el grafo de la Figura 3 (a).

**a**. ¿Cuántos subgrafos conexos de $G$ tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?

**b**. Describa los subgrafos $G_1$ y $G_2$ de $G$ (Figura 3 (b) y (c)) como subgrafos inducidos y en términos de la eliminación de vértices de $G$.

**c**. Trace el subgrafo de $G$ inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.

**d**. Considere las aristas $e_1 = \{a, c\}$ y $e_2 = \{a, d\}$ del grafo $G$ y trace el subgrafo $G - \{e_1, e_2\}$.

**e**. Encuentre un subgrafo de $G$ que no sea inducido.

**f**. ¿Cuántos subgrafos recubridores tiene $G$?

**g**. ¿Cuántos de los subgrafos anteriores son conexos?

**h**. ¿Cuántos subgrafos de la parte **g.** tienen el vértice $a$ como vértice aislado?

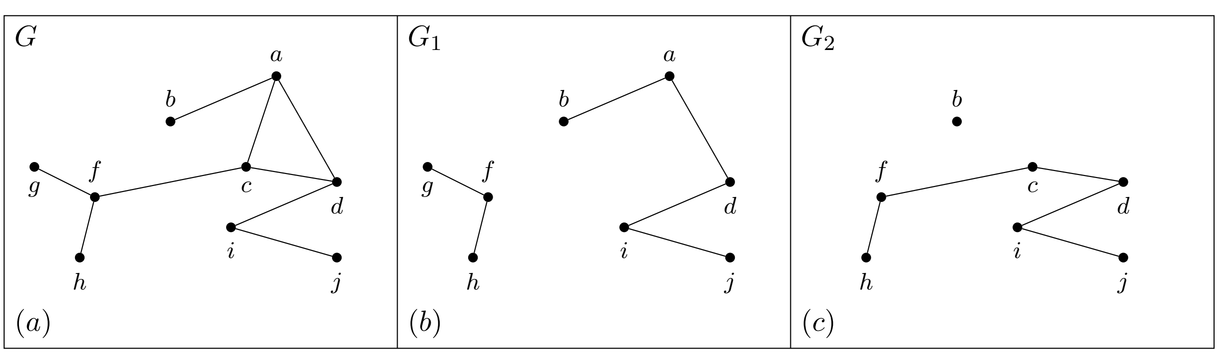



Figura 3:

**Ejercicio 11.** (Examen marzo 2001)
El hipercubo $H_n$ de dimensión $n$, es el grafo cuyos vértices son las $n$-uplas de ceros y unos, tales que dos $n$-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas, por ejemplo $(0,0,\ldots,0)$ es adyacente a $(1,0,\ldots,0)$ pero no a $(1,0,\ldots,0,1)$.

- **a**. Halle los conjuntos de vértices de $H_1$, $H_2$, $H_3$ y dibuje dichos grafos.
- **b**. ¿Cuántos vértices y aristas tiene $H_n$?
- **c**. Halle 2 caminos simples en $H_5$ de $(0,0,1,1,0)$ a $(0,0,0,1,0)$.
- **d**. Demuestre que $H_n$ no tiene 3–ciclos.
- **e**. ¿Cuántos 4–ciclos tiene $H_n$? (*Sugerencia*: cuente cuántos 4–ciclos pasan por un vértice fijo.)

**Ejercicio 12.** Sea $G_n$ el grafo con vértices las $n$-uplas de 0s y 1s:

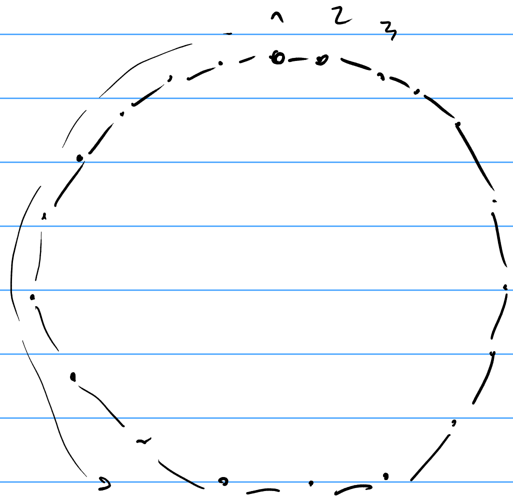
$$V(G_n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \{0,1\}\}$$

Dos $n$-uplas serán adyacentes si difieren en los valores de exactamente dos de sus posiciones, coincidiendo en el resto. Por ejemplo, en $G_n$, $(0,0,1)$ es adyacente a $(1,1,1)$ y a $(1,0,0)$, pero no a $(1,1,0)$.

- **a**. Dibuje $G_2$, $G_3$ y $G_1$.
- **b**. ¿Para qué valores de $n$ es $G_n$ conexo?
- **c**. ¿Cuántas componentes conexas tiene $G_n$?

*Sugerencia*: sume los 1s de cada vértice.

**Ejercicio 3.** (1[er] parcial 2017) Sean $x$ e $y$ dos vértices adyacentes de $C_{20}$. ¿Cuántos caminos de largo 11 empiezan en $x$ y terminan en $y$?




1 y 2 son adyacentes

A , H

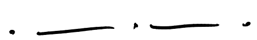
5 A's , 6 H's

Las palabras con 5 A's y 6 H's

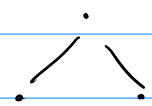
$$\boxed{\frac{11!}{5!\,6!}}$$

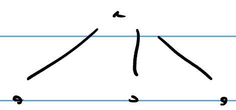
c. ¿Cuántos caminos simples tienen $P_n$ y $K_{1,n}$?

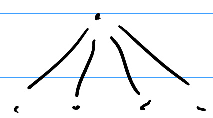
$K_{1,1} = P_2$ : 

$P_3$ : 

$P_4$ : 


$K_{1,2}$ 

$K_{1,3}$ 

$K_{1,4}$ 

(1,2) , (1,2,3) , (1,2,3,4)

(2,3) , (2,3,4)

(3,4)

los que empiezan en 1 hacia la der son 3

los que empiezan en 2 hacia la der son 2 los que empiezo en 3 hacia la der es 1

2. $(3+2+1) = 12 = 3 \cdot 4$

Por cada camino que tengo a la der tengo otro a la izquierda

Hay que agregar los caminos triviales

(1), (2), (3), (4) Entonces hay

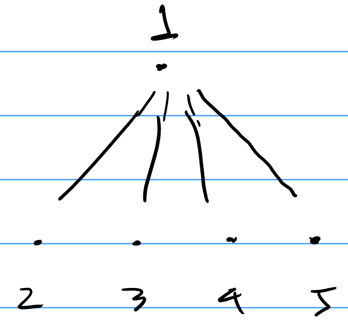
$12+4$ caminos simples.

$3 \cdot 4 + 4 = 4^2$

Para $n$ cualquiera hay $(n-1) \cdot n + n = n^2$

caminos simples

$K_{1,4}$




los de largo 0

(1), (2), (3), (4), (5) $\rightarrow 5$

$4+1$

largo 1 (1,2), (1,3),

(1,4), (1,5)

(2,1), (3,1) (4,1), (5,1)

$2 \cdot 4$

largo 2 $P(4,2) = \frac{4!}{2!} = 3 \cdot 4$

(2,1,3), (2,1,4), (2,1,5)

(3,1,4), (3,1,5), (3,1,2)

(4,1,5), (4,1,2), (4,1,3)

(5,1,2), (5,1,3), (5,1,4)

En total $1+4+2\cdot 4+3\cdot 4$

$1+4(3+2+1) = 1+4\cdot 6$

$= 25$

Para $n$ cualquiera $1+n+2\cdot n+(n-1)n$

$n(n-1+2+1)+1 = n(n+2)+1$

# PRÁCTICO 13
## Grafos II

### DEFINICIONES Y SUPOSICIONES:

- Todos los grafos de este práctico se suponen simples, es decir, sin aristas múltiples ni lazos.
- Un vértice es *aislado* si no es adyacente a ningún otro.
- El *grafo complemento* $\overline{G}$ de un grafo $G = (V, E)$ se define como $\overline{G} = (V, V^{(2)} \setminus E)$ donde $V^{(2)} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$. Un grafo $G$ se dice *autocomplementario* si es isomorfo a $\overline{G}$.
- Si $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son dos grafos vértices disjuntos ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), entonces su *grafo unión* $G_1 \cup G_2$ se define como $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.
- Denotaremos $\kappa(G)$ a la cantidad de componentes conexas de $G$.
- Un grafo se dice $k$*–regular* si todos sus vértices tiene grado $k$. Un *vértice colgante* es un vértice de grado 1. Cuando el grafo es un árbol, también llamamos *hojas* a los vértices colgantes.

### ÁRBOLES

**Ejercicio 1.** Sean $T_1 = (V_1, E_1)$ y $T_2 = (V_2, E_2)$ dos árboles. Determine $|V_1|, |V_2|$ y $|E_2|$ si se sabe que $|E_1| = 17$ y $|V_2| = 2|V_1|$. .

**Ejercicio 2.**

**a**. Sea $F_1 = (V_1, E_1)$ un bosque de siete árboles con $|E_1| = 40$. ¿Cuánto vale $|V_1|$?

**b**. Si $F_2 = (V_2, E_2)$ es un bosque con $|V_2| = 62$ y $|E_2| = 51$, ¿cuántos árboles determina $F_2$?

**Ejercicio 3.** ¿Qué tipo de árboles tiene exactamente dos hojas?

**Ejercicio 4.** De un ejemplo de un grafo $G$ que no sea un árbol y que tenga un vértice más que el número de aristas. Pruebe que cualquier grafo que verifique las condiciones anteriores no puede ser conexo (sug: considere un árbol recubridor).

**Ejercicio 5.** Demuestre que la cantidad de componentes conexas de un grafo con $n$ vértices y $m$ aristas es mayor o igual a $n - m$ (sug: considere un bosque recubridor). ¿Cuándo se da la igualdad?

**Ejercicio 6.** ¿Cuál es la máxima cantidad de vértices que puede tener un grafo conexo con $30$ aristas?

### ISOMORFISMO

**Ejercicio 7.** Encuentre todos los árboles con 6 vértices, a menos de isomorfismos. ¿Cuáles de estos árboles son árboles recubridores de $K_{3,3}$?

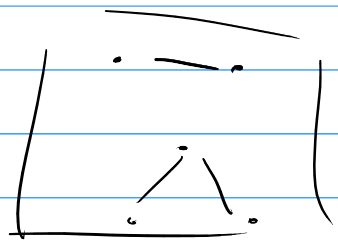
$T=(V,E)$ es un árbol si es conexo y no tiene ciclos.

Teo: $|V| = |E| + 1$.

**Ejercicio 1.** Sean $T_1 = (V_1, E_1)$ y $T_2 = (V_2, E_2)$ dos árboles. Determine $|V_1|, |V_2|$ y $|E_2|$ si se sabe que $|E_1| = 17$ y $|V_2| = 2|V_1|$. .

$$\left.\begin{array}{l} |V_1| = |E_1| + 1 \\ |V_2| = |E_2| + 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} |V_1| = 18 \\ |V_2| = 36 \\ |E_2| = 35 \end{array}$$

Def: Un bosque es un grafo tq sus componentes conexas son árboles.



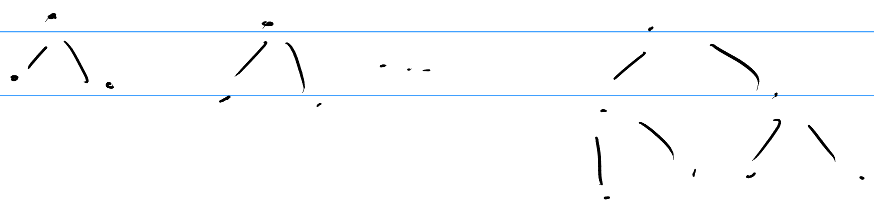
bosque con dos árboles.

**Ejercicio 2.**

**a**. Sea $F_1 = (V_1, E_1)$ un bosque de siete árboles con $|E_1| = 40$. ¿Cuánto vale $|V_1|$?

**b**. Si $F_2 = (V_2, E_2)$ es un bosque con $|V_2| = 62$ y $|E_2| = 51$, ¿cuántos árboles determina $F_2$?

a.



Como $F_1$ es un bosque con

7 árboles cada uno de los árboles

cumple el teorema $\Rightarrow$ si $F_1$

$F_1 = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cdots \cup T_7$ con $T_i$ árbol

$= (V_1, E_1)$

$T_i = (W_i, H_i)$ $\quad \underline{|W_i| = |H_i| + 1}$

$V_1 = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_7$

$V_1 = |W_1| + \cdots + |W_7|$

$= |H_1| + 1 + |H_2| + 1 + \cdots + |H_7| + 1$

$= 7 + \underbrace{|H_1| + |H_2| + \cdots + |H_7|}_{|E_1|}$

$= 7 + |E_1| = 7 + 40 = 47$

**Ejercicio 8.**

**a**. Demuestre que dos grafos son isomorfos si y solo si sus grafos complemento lo son.

**b**. ¿Cuáles de los grafos de la Figura 1 son isomorfos?

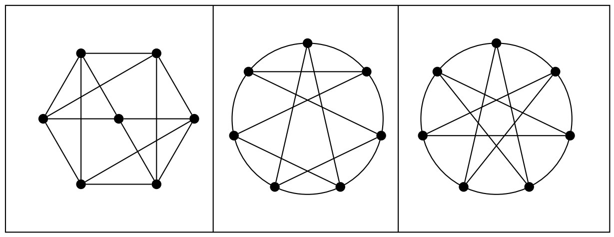


Figura 1

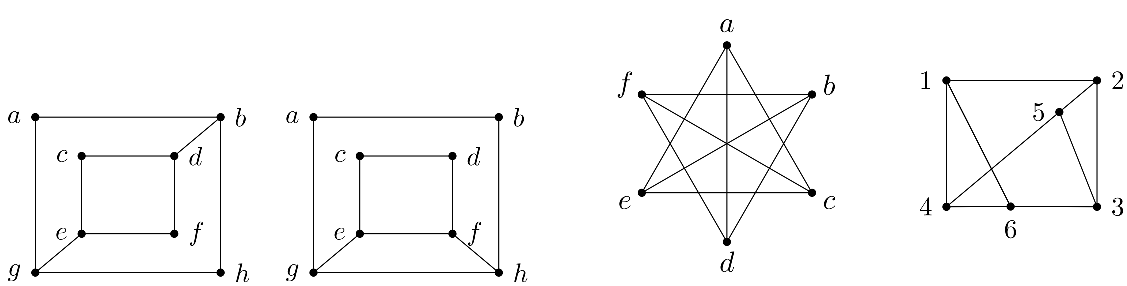
**c**. Determine el número de aristas de $\overline{G}$ en función del número de aristas de $G$.

**d**. Determine el número de aristas de un grafo autocomplementario de orden $n$.

**e**. Construya un grafo autocomplementario de orden $4$ y otro de orden $5$.

**f**. Determine para qué valores de $n$ existe un grafo autocomplementario de orden $n$.
*Sugerencia:* Demuestre que $n$ debe ser de la forma $4k$ o $4k+1$. Para $n = 4k$, generalice la estructura del grafo autocomplementario de orden 4 agrupando los vértices en cuatro grupos. Para $n = 4k+1$ agregue un vértice al grafo anterior y únalo en forma adecuada.

**Ejercicio 9.** Para cada par de grafos de la Figura 2 determine si los grafos son o no isomorfos.




**(a)** **(b)**

Figura 2

**Ejercicio 10.** Pruebe que $K_n$ posee tres subgrafos dos a dos isomorfos cuyos conjuntos de aristas son una partición del conjunto de aristas de $K_n$ si y sólo si $n$ es de la forma $3k$ o $3k+1$.

## Grado

**Ejercicio 11.**

**a**. Determine el orden de un grafo 3–regular con 9 aristas.

**b**. Ídem con 10 aristas, dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.

**c**. ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

**Ejercicio 12.** En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda 3 tarjetas de navidad a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba tarjetas de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

**Ejercicio 13.** Sea $G$ un grafo con $n$ vértices. ¿Cuántos vértices de $\overline{G}$ tienen grado par si $G$ tiene un sólo vértice de grado par?

**Ejercicio 14.** ¿Cuál es el máximo orden posible para un grafo con 17 aristas si todos sus vértices tienen grado mayor o igual a 3?

¿Existe algún grafo con dicha cantidad de vértices? En caso afirmativo construirlo.

**Ejercicio 15.** Para todo natural par $n \geq 4$ construya un grafo conexo 3–regular con $n$ vértices.

**Ejercicio 16.** (Examen diciembre 2016 Ej6)
Demuestre que todo grafo conexo con 2 o más vértices tiene dos vértices con el mismo grado.

**Ejercicio 17.** ¿Cuántas hojas (vértices colgantes) tiene un árbol con cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5?

## Circuitos y Recorridos Eulerianos, Ciclos y Caminos Hamiltonianos

**Ejercicio 18.** Halle un recorrido o un circuito euleriano para cada grafo de la Figura 3 o demuestre que no existe.

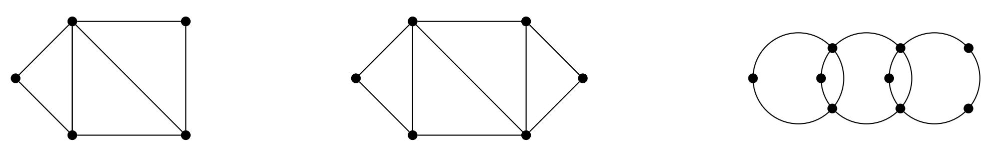


Figura 3

**Ejercicio 19.** Encuentre un recorrido euleriano para $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ y $E = \{ab, ac, ai, aj, bc, cd, ci, de, df, dg, dh, ef, fg, fh, gh, hi, ij\}$.

**Ejercicio 20.**

**a**. Determine los valores de $n$ para los cuales el grafo completo $K_n$ tendrá un circuito euleriano.

**b**. ¿Para cuáles $n$ tiene $K_n$ un recorrido euleriano?

**Ejercicio 21.** Encuentre la longitud máxima de un recorrido en a) $K_6$; b) $K_8$; c) $K_{10}$; d) $K_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

**Ejercicio 22.** Sea $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ los conjuntos de grafos Eulerianos y Hamiltonianos respectivamente. Dé un ejemplo de un grafo en $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$, otro en $\mathcal{H} \setminus \mathcal{E}$ y otro en $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}$.

**Ejercicio 23.** Encuentre un ciclo Hamiltoniano, si existe, para cada grafo de la Figura 4.

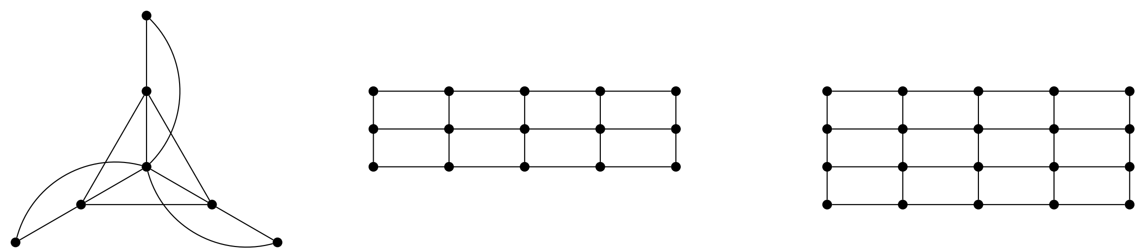


Figura 4

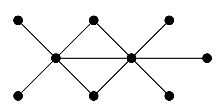
## Ejercicios Complementarios

**Ejercicio 24.** (Examen febrero 2009) ¿Cuántos vértices tiene un árbol con 16 vértices de grado 1, 20 vértices de grado 2 y el resto de grado 4?

**Ejercicio 25.** (Examen 2003) Halle el máximo número de aristas que se le puede quitar a $K_6$ sin que el grafo deje de ser conexo.

**Ejercicio 26.** (Parcial 2001) Sea $G$ un grafo acíclico, con $n$ vértices y $k$ componentes conexas. Hallar cuantas aristas tienen $G$.

**Ejercicio 27.** ($2^{\text{do}}$ parcial 2001) Halle el número de subgrafos conexos recubridores del grafo de la figura, a menos de isomorfismos.



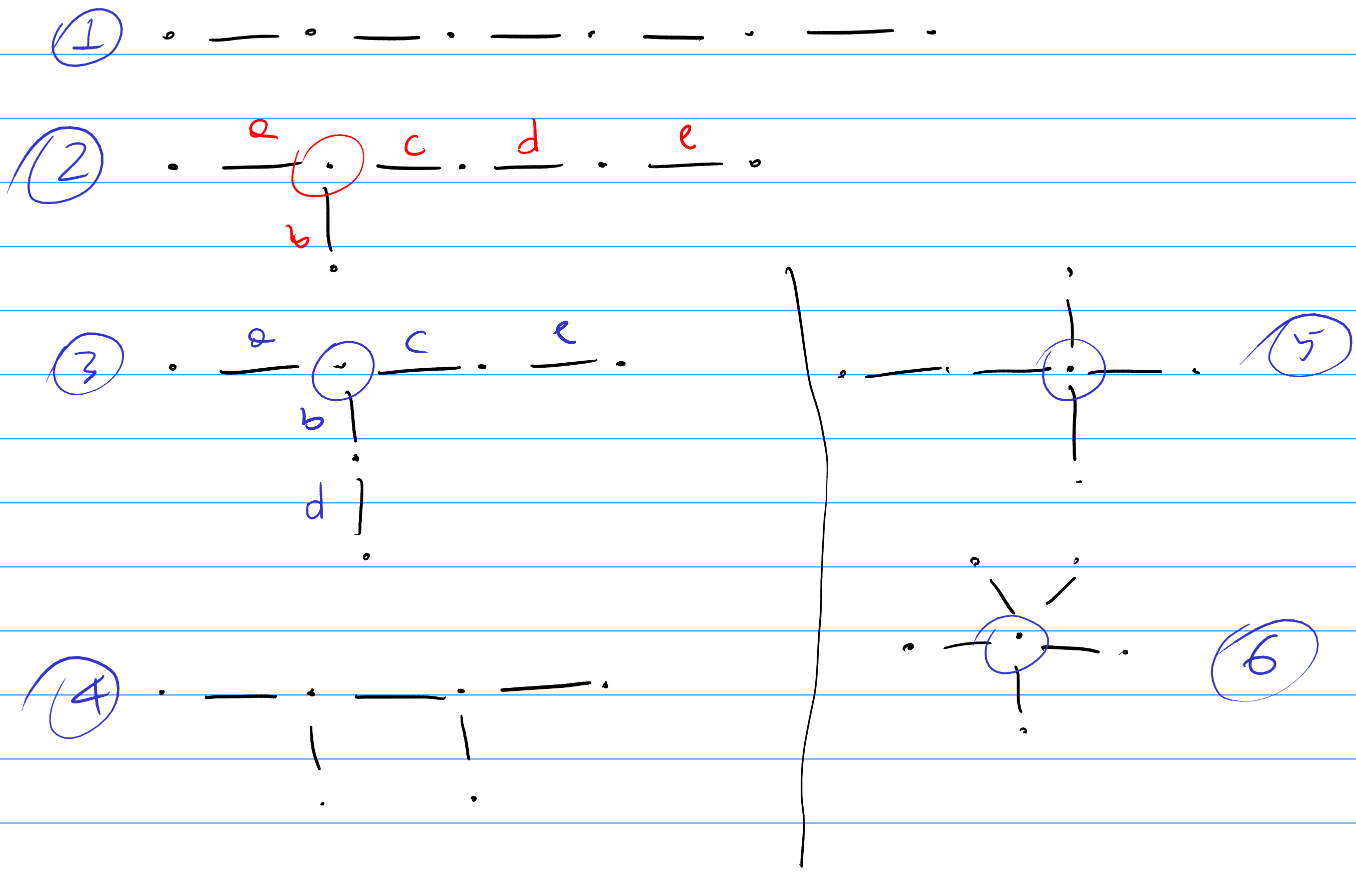
**Ejercicio 28.** (Examen febrero 2010) Dados $k \geq 2$, $v \geq 3$ y un grafo $G$, $k$-regular con $v$ vértices diga cuáles de las siguientes es condición suficiente para que $G$ tenga un ciclo Hamiltoniano.
a) $2k \geq v$; b) $k \leq v$; c) $2k < v$; d) $2k \neq v$

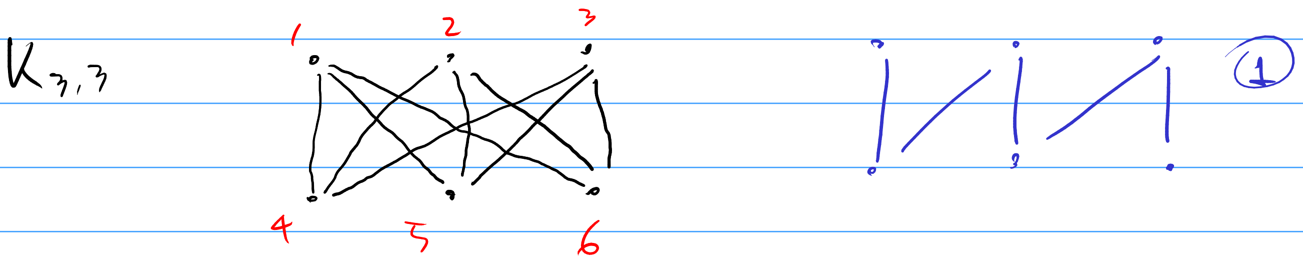
**Ejercicio 29.** ($2^{\text{do}}$ parcial 2009)

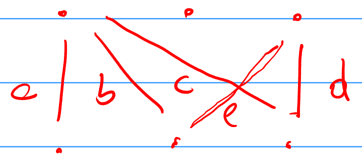
**a**. Sea $G = (V, E)$ un grafo sin lazos, con $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Llamamos $H = (V_H, E_H)$ al grafo inducido por $\{v_3, ..., v_n\}$. Probar que si $gr(v_1) + gr(v_2) < n$ entonces $|E_H| + gr(v_1) + gr(v_2) < C_2^{n-1} + 2$.

**b**. Sea $G = (V, E)$ un grafo sin lazos con $|V| = n > 2$ y $|E| \geq \binom{n-1}{2} + 2$. Probar que $G$ tiene un ciclo hamiltoniano.

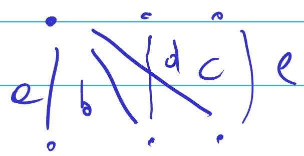
**Ejercicio 7.** Encuentre todos los árboles con 6 vértices, a menos de isomorfismos. ¿Cuáles de estos árboles son árboles recubridores de $K_{3,3}$?



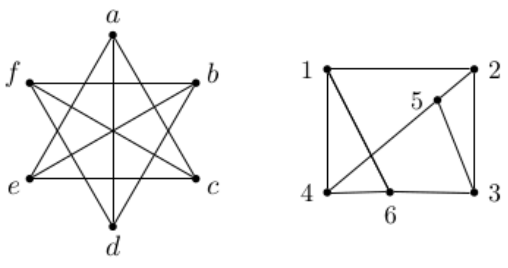




2 no es árbol recubridor

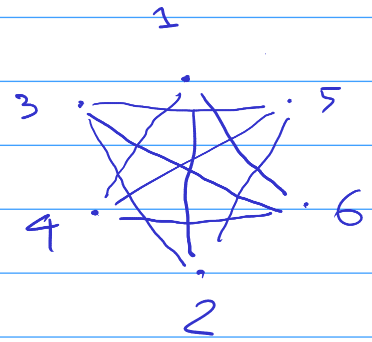



3 si funciona

5 y 6 no pueden ser por
tengo un vértice de grado $> 3$

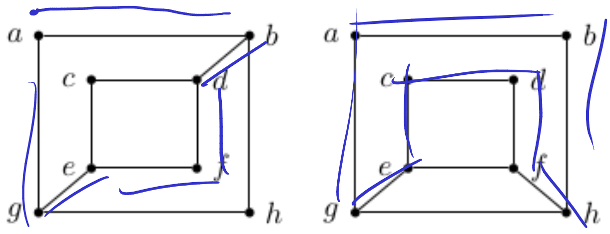



**(b)**




$a \mapsto 1$
$b \mapsto 5$
$c \mapsto 6$
$d \mapsto 2$
$e \mapsto 4$
$f \mapsto 3$

son isomorfos




**(a)**

No son isomorfos

En el primero, el camino cerrado simple más largo tiene largo 6

Pero en el segundo es 8.

Si fuesen isomorfos deberían ser iguales los largos esos.