Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística

Matemática Discreta 1

Primer semestre 2024

PRÁCTICO 3: Combinatoria II

Ejercicio 1.

(a) ¿Cuántas fichas diferentes hay en el juego popular del dominó?

(b) ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al arrojar 3 dados idénticos?

Ejercicio 2. Un comité de 12 personas debe elegir de entre sus miembros un presidente, un secretario, y un tesorero. ¿De cuántas formas puede hacerse esto?

Ejercicio 3. ¿De cuántas formas es posible hacer una partición de un conjunto de $2n$ elementos, en n conjuntos de 2 elementos?

Ejercicio 4. Considerar la suma: $\sum_{i=0}^{i=n} C_m^i$. $= C_{m+1}^{n+1}$

a. Calcular la suma para algunos casos, usando el triángulo de Pascal.
Aclaración: si $i < m$ asumimos $C_m^i = 0$.

b. Conjeture cuánto suma en general y demuéstrelo por Inducción Completa.

Ejercicio 5. Hallar la cantidad de maneras de distribuir r pelotas idénticas en n cajas diferentes.

Ejercicio 6.

(a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 personas en 12 sillas puestas en línea?

(b) Ídem pero las personas no deben quedar sentadas en asientos contiguos.

Ejercicio 7. ¿De cuántas formas puede distribuir un maestro 8 bizcochos de chocolate y 7 de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

Ejercicio 8. Usando que $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, probar que:

$$\sum_{i=0}^{i=n} (C_i^n)^2 = C_n^{2n}.$$

$$\sum_{i=0}^{i=n} C_m^i = C_{m+1}^{n+1} \qquad \forall \; m, n \in \mathbb{N}$$

$C_m^n = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ si $n \geq m$

$C_m^n = 0$ si $n < m$

Fijemos m, y tratemos de hacer inducción en n.

Tomemos paso base $n=m$ ya que si $n<m$ da todo 0 y es trivial.

Paso base: $k = m$

$$\sum_{i=0}^{m} C_m^i = \overset{0}{C_m^0} + \overset{0}{C_m^1} + \overset{0}{C_m^2} + \dots + \overset{1}{C_m^m}$$

$$= 1 = C_{m+1}^{k+1} \checkmark$$

m/n	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3	•					
4						

Recordar: $C_m^n = 0$ si $n < m$

Hipótesis inductiva: la prop

$$\sum_{i=0}^{k} C_m^i = C_{m+1}^{k+1}$$

vale para $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq m$

Tesis: $$\sum_{i=0}^{k+1} C_m^i = C_{m+1}^{k+2}$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} C_m^i = \sum_{i=0}^{k} C_m^i + C_m^{k+1}$$

$$= C_{m+1}^{k+1} + C_m^{k+1}$$

por HI

Faltaría probar que $\boxed{C_{m+1}^{k+1} + C_m^{k+1} = C_{m+1}^{k+2}}$

Proposición: Si $n \geq m+1 \Rightarrow \boxed{C_m^n + C_{m+1}^n = C_{m+1}^{n+1}}$

Dem: Usamos la definición

$$\frac{n!}{\underbrace{m!}_{1\cdot 2 \cdots m}\,\overbrace{(n-m)!}^{1\cdot 2\cdots(n-m-1)(n-m)}} + \frac{n!}{\underbrace{(m+1)!}_{1\cdot 2\cdots m\cdot(m+1)}\,\overbrace{(n-m-1)!}^{1\cdot 2\cdots(n-m-1)}} =$$

$$\frac{n!\,(m+1)}{\underbrace{m!\,(m+1)}_{(m+1)!}\,(n-m)!} + \frac{n!\,(n-m)}{(m+1)!\,\underbrace{(n-m-1)!\,(n-m)}_{(n-m)!}}$$

$$= \frac{n!\,(m+1) + n!\,(n-m)}{(m+1)!\,(n-m)!} = \frac{n!\,(\overbrace{\cancel{m}+1+n-\cancel{m}}^{n+1})}{(m+1)!\,(n-m)!}$$

$$= \frac{n!\cdot(n+1)}{(m+1)!\,(n-m)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n-m)!} = C_{m+1}^{n+1}$$

$n=0 \to 1$

$n=1 \to 1 \quad 1$

$n=2 \quad 1 \quad 2 \quad 1$

$n=3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$

$n=4 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$

$n=5 \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$

$n=6 \quad 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$

$C^6_0 \quad C^6_1 \quad C^6_2 \quad C^6_3 \quad C^6_4 \quad C^6_5 \quad C^6_6$

$$\boxed{C^n_m + C^n_{m+1} = C^{n+1}_{m+1}}$$

Ejercicio 6.

(a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 personas en 12 sillas puestas en línea?

(b) Ídem pero las personas no deben quedar sentadas en asientos contiguos.

a) Hay que elegir 5 lugares de 12 sin importar el orden $\boxed{C^{12}_5} = \frac{12!}{5!\,7!}$

b) Ejemplos

P V P V P V P V P V V V

V P V P V V P V P V P V

V P V P V V P V P V V P

V V V P V P V P V P V P

Separamos en casos

1 Empieza con P termina con P

2 " " V " " V

3	"	"	P	"	"	V
4	"	"	V	"	"	P

2 personas _ _

y 5 lugares

P P P P P

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

P P _ P P P

P P _ P P _ P

cont = 0

```
for a = 1:12
  for b = 1:12
    for c = 1:12
      for d = 1:12
        for e = 1:12
          if |a-b| >= 2   |b-c| >= 2   |c-d| >= 2
             |a-c| >= 2   |b-d| >= 2   |-- --
             |a-d| >= 2   |b-e| >= 2
             |a-e| >= 2
                                           ?
             cont = cont + 1.
```