Ejercicio 1. Se consideran los siguientes números naturales:

$$a = 1485000, \quad b = 15^4 \times 42^3 \times 56^5, \quad c = 15!, \quad d = 1485000^3, \quad e = (15!)^5.$$

Para cada número:

a. Halllar la descomposición en factores primos.

b. Determinar la cantidad de divisores positivos.

c. Determinar si es un cuadrado perfecto.

$a = 1485000$

$= 1485 \cdot 1000$

$= 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2^3 \cdot 5^3$

$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 11$

$1000 = 10^3 = (2\cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$

$1485 = 3 \cdot 495 = 3 \cdot 3 \cdot 165 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 55$

$= 3^3 \cdot 5 \cdot 11$

* cantidad de divisores positivos de a?

sea n un divisor de a

$n = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 11^\delta$

con $0 \leq \alpha \leq 3$

$0 \leq \beta \leq 3$

$0 \leq \gamma \leq 4$

$0 \leq \delta \leq 1$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$

$n = \underset{4 \text{ pos}}{2^\alpha}\ \underset{4 \text{ pos}}{3^\beta}\ \underset{5 \text{ pos}}{5^\gamma}\ \underset{2 \text{ pos}}{11^\delta}$

\# divisores positivos de a $= 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 = 160$

en general:

si $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_\ell^{\alpha_\ell}$ con $\alpha_i \geq 1$

\# divisores positivos de $m = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdots (\alpha_\ell+1)$

si $n | m$ entonces $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_\ell^{\beta_\ell}$

con $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1 \rightarrow$ hay $\alpha_1 + 1$ posibles valores para β_1

$0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2 \to$ hay α_2+1 posibles valores para β_2

$\vdots$

$0 \leq \beta_\ell \leq \alpha_\ell \to$ hay $\alpha_\ell+1$ posibles valores para β_ℓ

* a es un cuadrado perfecto?

buscamos m tal que $m^2 = a = 2^{3} \cdot 3^{3} \cdot 5^4 \cdot 11^{1}$ (impar, impar, impar) $\Rightarrow$ a no es un cuadrado perfecto.

supongamos que $m^2 = a$

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_\ell^{\alpha_\ell} \Rightarrow m^2 = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_\ell^{\alpha_\ell})^2$$

$$= (p_1^{\alpha_1})^2 (p_2^{\alpha_2})^2 \cdots (p_\ell^{\alpha_\ell})^2$$

$$= \underbrace{p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_\ell^{2\alpha_\ell}}$$

los exponentes en la descomposición en primos de m^2 son numeros pares

Reciprocamente si n verifica que los exponentes en su descomposición en primos son pares entonces n es un cuadrado perfecto:

$$n = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_\ell^{2\alpha_\ell} = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_\ell^{\alpha_\ell})^2$$

Ejercicio 2.

a. Hallar el menor número natural n tal que $6552 \times n$ sea un cuadrado perfecto.

buscamos el menor n tal que 6552n sea un cuadrado perfecto

$\to$ para que 6552n sea un cuadrado perfecto todos los exponentes de su descomposición en primos tienen que ser pares

$$6552 = 2 \cdot 3276 = 2^2 \cdot 1638 = 2^3 \cdot 819 = 2^3 \cdot 3 \cdot 273 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 91 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$$

$$6552 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$$

$$\to n = 2^1 \cdot 7^1 \cdot 13^1 = 182$$

Ejercicio 3. Decidir si existen enteros positivos a y b que satisfagan:

a. $a^2 = 8b^2$. **b.** $a^2 = 3b^3$. **c.** $7a^2 = 11b^2$.

a) buscamos a y b enteros positivos tales que $a^2 = 8b^2$

sea $n = a^2 = 8b^2$

$$n = 8 \cdot \overbrace{2^4 \cdot 3^2}^{b^2}$$

$* \; n = 8b^2$

$$\Rightarrow n = 2^{3+\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_e^{\alpha_e} \quad \text{con} \begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \alpha_i \geq 1 \end{cases}$$

$$n = 2^3 \cdot \underbrace{2^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_e^{\alpha_e}}_{b^2}$$

$$b^2 = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_e^{\alpha_e} \text{ es un cuadrado perfecto} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\alpha \text{ par}} \\ \alpha_i \text{ par} \end{cases}$$

$* \; n = a^2$

$$n = 2^{3+\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_e^{\alpha_e}$$

absurdo!

$$\Rightarrow a^2 = 2^{3+\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_e^{\alpha_e} \text{ es un cuadrado perfecto} \Rightarrow \begin{cases} 3+\alpha \text{ par} \rightarrow \underline{\alpha \text{ impar}} \\ \alpha_i \text{ par} \end{cases}$$

entonces no existen a, b tq $a^2 = 8b^2$

$$2^{par} \quad 2^3 \cdot 2^{par}$$

b) buscamos a y b enteros positivos tales que $a^2 = 3b^3$

sea $n = a^2 = 3b^3$

$* \; n = 3b^3$

$$\rightarrow n = 3^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_e^{\alpha_e} \quad \text{con } \alpha \geq 1, \; \alpha_i \geq 1$$

$$n = 3 \cdot \underbrace{3^{\alpha-1} p_1^{\alpha_1} \cdots p_e^{\alpha_e}}_{\text{descomposición en primos de } b^3}$$

$$b^3 = 3^{\alpha-1} p_1^{\alpha_1} \cdots p_e^{\alpha_e} \Rightarrow \begin{cases} \alpha-1 \text{ múltiplo de } 3 \\ \alpha_i \text{ múltiplo de } 3 \end{cases}$$

$$b = q_1^{\beta_1} \cdots q_e^{\beta_e}$$

$$b^3 = (q_1^{\beta_1} \cdots q_e^{\beta_e})^3 = \underbrace{q_1^{3\beta_1} \cdots q_e^{3\beta_e}}_{\text{los exponentes son múltiplos de } 3}$$

$* \; n = a^2$

$$n = 3^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_e^{\alpha_e} \quad \text{con } \alpha \geq 1, \; \alpha_i \geq 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 3^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_e^{\alpha_e} \text{ es un cuadrado perfecto} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \text{ es par} \\ \alpha_i \text{ es par} \end{cases}$$

en conclusión:

$$n = 3^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_e^{\alpha_e} \quad \text{con } \begin{cases} \alpha \text{ multiplo de } 2 \text{ y } \alpha-1 \text{ multiplo de } 3 \\ \alpha_i \text{ multiplo de } 2 \text{ y de } 3 \rightarrow \alpha_i \text{ multiplo de } 6 \end{cases}$$

por ejemplo:

$$n = a^2 = 3b^3$$

tomamos $\begin{cases} \alpha = 4 \\ \alpha_i = 0 \end{cases}$

$$n = 3^4 \longrightarrow n = (3^2)^2 \rightsquigarrow a = 9$$

$$n = 3^4 \longrightarrow n = 3 \cdot 3^3 \rightsquigarrow b = 3$$

otro ejemplo:

tomamos $\begin{cases} \alpha = 4 \\ \alpha_1 = 6 \text{ y } p_1 = 5 \\ \text{el resto de } \alpha_i = 0 \end{cases}$

$$n = 3^4 \cdot 5^6 \longrightarrow n = 3^4 \cdot 5^6 = (3^2)^2 (5^3)^2 = (3^2 \cdot 5^3)^2 \rightarrow a = 3^2 \cdot 5^3$$

$$n = 3^4 \cdot 5^6 \longrightarrow n = 3 \cdot 3^3 \cdot 5^6 = 3(3 \cdot 5^2)^3 \longrightarrow b = 3 \cdot 5^2$$

Ejercicio 6. Hallar los números naturales a y b que cumplen: $\text{mcd}(a, b) = 18$, a tiene 21 divisores positivos y b tiene 10 divisores positivos.

buscamos a y b naturales tq $\begin{cases} \text{mcd}(a,b) = 18 \\ a \text{ tiene } 21 \text{ divisores positivos} \\ b \text{ tiene } 10 \text{ divisores positivos} \end{cases}$

que primos tienen que aparecer en la descomposición de a y b?

$\text{mcd}(a,b) = 18 = 2 \cdot 3^2$

$\text{mcd}(a,b) | a$ y $\text{mcd}(a,b) | b$

$\Rightarrow a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} p_1^{\alpha_1} \cdots p_e^{\alpha_e}$ con $\begin{cases} \alpha \geq 1 \\ \beta \geq 2 \\ \alpha_i \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow b = 2^{\gamma} 3^{\delta} q_1^{\beta_1} \cdots q_n^{\beta_n}$ con $\begin{cases} \gamma \geq 1 \\ \delta \geq 2 \\ \beta_i \geq 0 \end{cases}$

* qué sabemos de a?

$a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} p_1^{\alpha_1} \cdots p_e^{\alpha_e}$ con $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 2$, $\alpha_i \geq 0$

a tiene 21 divisores positivos

$\Rightarrow 21 = (\alpha+1)(\beta+1)(\alpha_1+1) \cdots (\alpha_e+1)$

pero $21 = 7 \cdot 3$

entonces tenemos dos posibilidades

① $\alpha+1 = 7$, $\beta+1 = 3$, $\alpha_i + 1 = 1$

$\alpha = 6$ y $\beta = 2$ $\longrightarrow$ $a = 2^6 \cdot 3^2$

② $\alpha+1 = 3$, $\beta+1 = 7$, $\alpha_i + 1 = 1$

$\alpha = 2$ y $\beta = 6$ $\longrightarrow$ $a = 2^2 \cdot 3^6$

* qué sabemos de b?

$b = 2^{\gamma} \cdot 3^{\delta} q_1^{\beta_1} \cdots p_n^{\beta_n}$ con $\gamma \geq 1$, $\delta \geq 2$, $\beta_i \geq 0$

b tiene 10 divisores positivos

$10 = (\gamma+1)(\delta+1)(\beta_1+1) \cdots (\beta_n+1)$

pero $10 = 2 \cdot 5$

entonces tenemos dos posibilidades

① $\gamma+1 = 2$ y $\delta+1 = 5$

$\gamma = 1$ $\delta = 4$

② $\gamma+1 = 5$ y $\delta+1 = 2$

$\gamma = 4$ $\delta = 1$ $\leftarrow$ no puede ser porque $\delta \geq 2$

entonces $\gamma = 1$ y $\delta = 4$

entonces $\boxed{b = 2^1 \cdot 3^4}$

Tenemos: $\boxed{b = 2 \cdot 3^4}$ $mcd(a,b) = 2 \cdot 3^2$

$\boxed{a = 2^6 \cdot 3^2}$

$a = 2^2 \cdot 3^6$ X porque con este valor de a $mcd(a,b) = 2 \cdot 3^4$