Ejercicio 10.

a. Determinar los enteros w, x e y que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diofánticas lineales:

$$\begin{cases} w + x + y & = 50 \\ w + 13x + 31y & = 116 \end{cases}, \quad w, x, y \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

b. ¿Existe una solución de (1) tal que $w > 0,\ x > 0$ e $y > 0$? En caso afirmativo calcular una.

c. ¿Existe una solución de (1) tal que $w > 10,\ x > 18$ e $y > -15$? En caso afirmativo calcular una.

a) $\begin{cases} w + x + y = 50 & (1) \\ w + 13x + 31y = 116 & (2) \end{cases}$

$(2) - (1)$: $12x + 30y = 66$

$\Leftrightarrow \boxed{2x + 5y = 11}$

1 $mcd(2,5) = 1 \Rightarrow mcd(2,5) \mid 11 \Rightarrow$ tiene solución

2 solución particular?
una solución particular es $(3, 1)$

3 conjunto de soluciones:

$$2\left(3 + \frac{5k}{1}\right) + 5\left(1 - \frac{2k}{1}\right) = 11$$

$$S = \{(3+5k, 1-2k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{cases} w + x + y = 50 \\ w + 13x + 31y = 116 \end{cases}$$

obtuvimos $\begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = 1 - 2k \end{cases}$

despejamos w de (1): $w = 50 - x - y$

$$w = 50 - (3+5k) - (1-2k)$$
$$= 50 - 3 - 5k - 1 + 2k$$

$= 46 - 3k$

b) buscamos solución con $x > 0$, $y > 0$, $w > 0$

* $x > 0 \Rightarrow 3 + 5k > 0 \Rightarrow 5k > -3 \Rightarrow k > -\frac{3}{5}$ $\boxed{k \geq 0}$

$k > -0{,}6$

* $y > 0 \Rightarrow 1 - 2k > 0 \Rightarrow 1 > 2k \Rightarrow \frac{1}{2} > k$ $\boxed{k \leq 0}$

$x > 0$ y $y > 0 \Rightarrow k = 0$

si $k = 0$ entonces $w > 0$? $w = 46 - 3k = 46$ si $k = 0$

existe una única solución tal que $x > 0$, $y > 0$, $w > 0$
y es la solución con $k = 0$:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ w = 46 \end{cases}$$

c) buscamos soluciones con $\begin{cases} w > 10 \\ x > 18 \\ y > -15 \end{cases}$

$w > 10 \Rightarrow 46 - 3k > 10 \Rightarrow -3k > -36$ $\boxed{k \leq 11}$

$\Rightarrow k < 12$

$x > 18 \Rightarrow 3 + 5k > 18 \Rightarrow 5k > 15$ $\boxed{k \geq 4}$

$\Rightarrow k > 3$

$y > -15 \Rightarrow 1 - 2k > -15 \Rightarrow -2k > -16$ $\boxed{k \leq 7}$

$\Rightarrow k < 8$

$\Rightarrow$ hay cuatro soluciones diferentes que verifican:

$\times\ k=4$

$\times\ k=5$

$\times\ k=6$

$\times\ k=7$

Práctico 1

Ejercicio 5. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de:

a. la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18.

b. la división de $a^2 + 7$ por 36.

$a = 18q + 5$ para algún $q \in \mathbb{Z}$

$a^2 + 7 = 36q' + \underline{r}$ $\qquad 36 = 18 \cdot 2$

$a^2 + 7 = (18q + 5)^2 + 7$ $\qquad 18^2 = 18 \cdot 18 = 9 \cdot \underbrace{2 \cdot 18} = 9 \cdot 36$

$= 18^2 q^2 + 2 \cdot 5 \cdot 18q + 25 + 7$

$= 9 \cdot 36 q^2 + 5 \cdot 36 q + 32$

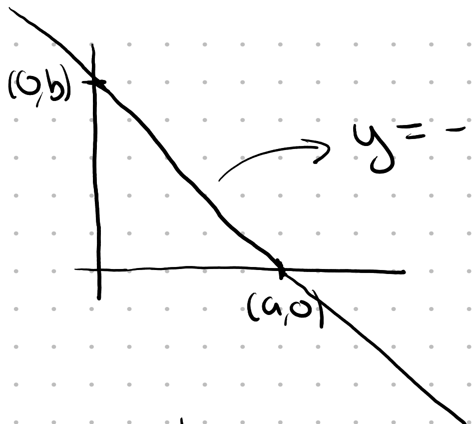
$= 36\underbrace{(9q^2 + 5q)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{32}_{\text{entre } 0 \text{ y } 36}$

entonces el resto es 32

Ejercicio 11. Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Se considera el segmento del plano cartesiano que tiene por extremos a los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$.

a. ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras hay en dicho segmento?

b. Usando lo anterior, calcule la cantidad de puntos cuando $a = 12$ y $b = 20$.



$\longrightarrow y = -\frac{b}{a}x + b \iff ay = -bx + ab$

$\iff \boxed{ay + bx = ab}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - b}{a - 0} = -\frac{b}{a}$

Vamos a buscar las soluciones enteras de

$$bx + ay = ab$$

① tiene solución?

$mcd(b,a) \mid ab \Rightarrow$ tiene solución

② solución particular?

$$\begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases}$$

$b \cdot a + a \cdot 0 = ab$ ✓

③ conjunto de soluciones $\qquad bx + ay = ab$

$$b\left(a + \frac{a k}{mcd(a,b)}\right) + a\left(0 - \frac{b k}{mcd(a,b)}\right) = ab$$

$$S = \left\{ \left(a + \frac{a k}{mcd(a,b)}, -\frac{b}{mcd(a,b)} k\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = a + \frac{a}{mcd(a,b)} k = a + a^* k \\ y = -\frac{b}{mcd(a,b)} k = -b^* k \end{array}\right.$$

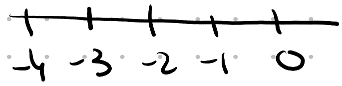
buscamos la cantidad de soluciones con $\begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \end{cases}$

$$0 \le x \le a \Rightarrow 0 \le a + a^* k \le a$$

$$\Rightarrow -a \le a^* k \le 0 \qquad a^* mcd(a,b) = a$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{a^*} \le k \le 0$$

$$\Rightarrow -\text{mcd}(a,b) \leq k \leq 0$$



→ hay $\text{mcd}(a,b)+1$ posibles valores para k

$$0 \leq y \leq b \Rightarrow 0 \leq -b^* k \leq b$$

$$\Rightarrow 0 \geq k \geq -\frac{b}{b^*}$$

$$\Rightarrow 0 \geq k \geq -\text{mcd}(a,b)$$

→ hay $\text{mcd}(a,b)+1$ posibles valores para k

entonces la cantidad de puntos de coordenadas enteras en el segmento es

$$\text{mcd}(a,b)+1$$