Ejercicio 6. En el cambio de turno de una fábrica de cerámicas, Alex, obrero que finalizaba su trabajo, dejó preparado un embarque de baldosas para un hospital en construcción. Armó una caja de 42 baldosas y dejó escrito: *"Pérez: va esta caja de 42 unidades y el resto son cajas de 50 unidades"*. La Sra. Pérez, luego de subir al camión la caja de 42 unidades, comenzó a colocar las de 50 unidades, cuando se preguntó: ¿cuántas de 50 hay que llevar? Subió a Administración, donde el Sr. Fernández le dijo que eran entre 20 y 40 cajas. Además, encontraron un papel que decía: *"Baldosas de cerámica para el Hospital Cristóbal Colón. Salas de 32 baldosas + una sala chica de 20 baldosas"*. ¿Cuántas baldosas precisa el hospital?

x = cantidad de cajas de 50 baldosas $\qquad 20 \leq x \leq 40$

$\rightarrow$ cantidad de baldosas: $50x + 42$

y = cantidad de salas de 32 baldosas

$\rightarrow$ cantidad de baldosas: $32y + 20$

Entonces: $50x + 42 = 32y + 20$

$$50x - 32y = -22$$

$$\boxed{25x - 16y = -11}$$

① $mcd(25,16) = 1 \rightarrow mcd(25,16) \mid -11 \rightarrow$ tiene solución

② buscamos una solución particular

$25 = 16 \cdot 1 + 9$

$16 = 9 \cdot 1 + 7$

$9 = 7 \cdot 1 + 2$

$7 = 2 \cdot 3 + 1 \longrightarrow 1 = 7 - 3 \cdot 2$

$= 7 - 3(9-7) \rightsquigarrow 7 - 3 \cdot 9 + 3 \cdot 7$

$= 4 \cdot 7 - 3 \cdot 9$

$25\tilde{x} - 16\tilde{y} = 1 \quad) \times (-11)$

$= 4(16-9) - 3 \cdot 9$

$25x - 16y = -11$

$= 4 \cdot 16 - 7 \cdot 9$

$= 4 \cdot 16 - 7(25-16)$

$= -7 \cdot 25 + 11 \cdot 16$

$25 \cdot (-7) + 16 \cdot 11 = 1$

$\Rightarrow 25 \cdot (-7) - 16(-11) = 1 \quad) \times (-11)$

$25(\underbrace{-7 \cdot (-11)}_{77}) - 16(\underbrace{-11 \cdot (-11)}_{121}) = -11$

$$25 \cdot 77 - 16 \cdot 121 = -11$$

una solución particular es $(77, 121)$

(3) escribimos el conjunto de soluciones

$$25(77 + \frac{16k}{1}) - 16(121 + \frac{25k}{1}) = -11$$

$$S = \{(77 + 16k, 121 + 25k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

buscamos las soluciones con $20 \leq x \leq 40$

$$20 \leq 77 + 16k \leq 40 \Rightarrow -57 \leq 16k \leq -37$$

$$\Rightarrow -\frac{57}{16} \leq k \leq -\frac{37}{16}$$

$$\Rightarrow -3{,}56 \leq k \leq -2{,}31$$

$$k = -3$$

entonces la cantidad de baldosas es:

$$50(77 + 16(-3)) + 42 = 50 \cdot 29 + 42 = 1492$$

Ejercicio 8. Tenemos cupones de compra de a pesos y de b pesos (tantos como queramos). En cada caso, determine si es posible comprar un artículo de n pesos, utilizando únicamente los cupones disponibles.

a. Artículo de $n = 555$ pesos, con cupones de $a = 25$ y $b = 24$ pesos. ✓

b. $n = 551$, $a = 25$ y $b = 24$. ✗

c. $n = 2780$, $a = 125$ y $b = 120$. ✓

$$2780 = 125x + 120y \Leftrightarrow 556 = 25x + 24y$$

coprimos

Teorema de existencia de soluciones enteras no negativas:

$$(*) \quad ax + by = n$$

donde: $a > 1$, $b > 1$

$\rightarrow$ a y b coprimos

$n \geq ab - a - b + 1$

entonces $(*)$ tiene soluciones enteras no negativas $\lrcorner$

a) artículo $n = 555$ pesos

cupones de 25 y 24 pesos

queremos ver si existen soluciones enteras no negativas de

$$25x + 24y = 555$$

$\text{mcd}(25, 24) = 1$

entonces existen soluciones enteras no negativas si

$$555 \geq 25 \cdot 24 - 25 - 24 + 1 = 552 \checkmark$$

Ejercicio 3. Una mujer tiene un cesto de manzanas. Haciendo grupos de 3, le sobran 2, y haciendo grupos de 4, le sobran 3. Hallar el número de manzanas que contiene el cesto, sabiendo que está entre 100 y 110.

x = cantidad de grupos de 3

$\rightarrow$ cantidad de manzanas: $3x + 2$ $\quad 100 \leq 3x + 2 \leq 110$

y = cantidad de grupos de 4

$\rightarrow$ cantidad de manzanas: $4y + 3$ $\quad 100 \leq 4y + 3 \leq 110$

entonces $3x + 2 = 4y + 3$

$$\boxed{3x - 4y = 1}$$

1. $\text{mcd}(3, 4) = 1$ ✓
2. solución particular $(-1, -1)$

$$3(-1) - 4(-1) = -3 + 4 = 1 \checkmark$$

3. conjunto de soluciones

$$3\left(-1 + \frac{4k}{1}\right) - 4\left(-1 + \frac{3k}{1}\right) = 1$$

$$S = \{(-1 + 4k, -1 + 3k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

buscamos las soluciones tales que $100 \leq 3x+2 \leq 110$

$$100 \leq 3x+2 \leq 110 \Rightarrow 100 \leq 3(-1+4k)+2 \leq 110$$

$$98 \leq 3(-1+4k) \leq 108$$

$$\frac{98}{3} \leq -1+4k \leq \frac{108}{3}$$

$$\frac{98}{3}+1 \leq 4k \leq \frac{108}{3}+1$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{98}{3}+1\right) \leq k \leq \frac{1}{4}\left(\frac{108}{3}+1\right)$$

$$8{,}41 \leq k \leq 9{,}25$$

$$k=9$$

entonces $k=9$ y la cantidad de manzanas es:

$$3x+2 = 3(-1+4\cdot 9)+2 = 107$$

Ejercicio 5. Una persona compra un artículo que cuesta $\$480$. La persona tiene un billete de $\$1000$ y tres billetes de $\$10$; mientras que el cajero tiene 6 billetes de $\$100$ y 7 de $\$50$. ¿De cuántas maneras le puede dar el cambio el cajero?

* la persona paga con un billete de 1000

$\rightarrow$ el cajero le tiene que dar 520 de cambio

$$100x + 50y = 520$$

$$\text{mcd}(100,50) = 50 \Rightarrow \text{mcd}(100,50) \nmid 520$$

$\Rightarrow$ no tiene solución

* paga con un billete de 1000 y uno de 10

$\rightarrow$ el cajero le tiene que dar 530 de cambio

$$100x + 50y = 530$$

$\Rightarrow$ no tiene solución

* paga con uno de 1000 y dos de 10

$\rightarrow$ cambio: 540

$$100x + 50y = 540$$

$\Rightarrow$ no tiene solución

* paga con uno de 1000 y tres de 10

$\rightarrow$ cambio: 550

$$100x + 50y = 550$$

$$mcd(100, 50) \mid 550 \Rightarrow \text{hay soluciones}$$

$$100x + 50y = 550$$

solución particular: $(5, 1)$

conjunto de soluciones:

$$100\left(5 + \frac{50k}{50}\right) + 50\left(1 - \frac{100k}{50}\right) = 550$$

$$S = \{(5+k,\ 1-2k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

buscamos las soluciones tales que $0 \leq x \leq 6$, $0 \leq y \leq 7$

$0 \leq x \leq 6 \rightarrow 0 \leq 5+k \leq 6$

$\rightarrow -5 \leq k \leq 1$

$0 \leq y \leq 7 \rightarrow 0 \leq 1-2k \leq 7$

$\rightarrow -1 \leq -2k \leq 6$

$\rightarrow \frac{1}{2} \geq k \geq -3$

$x = 5 + k$

$y = 1 - 2k$

* $k = -3 \rightarrow x = 2,\ y = 7$

* $k = -2 \rightarrow x = 3,\ y = 5$

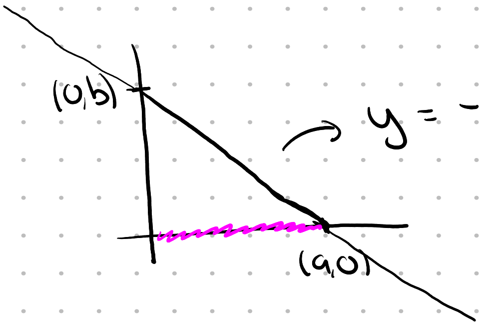
* $k=-1 \to x=4,\ y=3$

* $k=0 \to x=5,\ y=1$

Ejercicio 11. Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Se considera el segmento del plano cartesiano que tiene por extremos a los puntos $(a,0)$ y $(0,b)$.

a. ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras hay en dicho segmento?

b. Usando lo anterior, calcule la cantidad de puntos cuando $a=12$ y $b=20$.



$\to y = -\frac{b}{a}x + b$

$(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tales que

$ay + bx = ab$

$0 \leq x \leq a$

$0 \leq y \leq b$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-b}{a-0} = -\frac{b}{a}$$

$$y = -\frac{b}{a}x + b \longrightarrow y + \frac{b}{a}x = b$$

$$\longrightarrow ay + bx = ab$$

$$ay + bx = ab$$

① $\text{mcd}(a,b) \mid ab \Rightarrow$ hay soluciones

② $\begin{cases} y = b \\ x = 0 \end{cases}$ es una solución particular

③ conjunto de soluciones

$$a\left(b - \frac{bk}{\text{mcd}(a,b)}\right) + b\left(0 + \frac{ak}{\text{mcd}(a,b)}\right) = ab$$

$$S = \left\{\left(\frac{ak}{\text{mcd}(a,b)},\ b - \frac{bk}{\text{mcd}(a,b)}\right) : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

soluciones $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\text{mcd}(a,b)}\,k = a^{*}k \\[2ex] y = b - \dfrac{b}{\text{mcd}(a,b)}\,k = b - b^{*}k \end{cases}$

buscamos la cantidad de soluciones con $\begin{cases} 0 \leq x \leq a \leftarrow \\ 0 \leq y \leq b \leftarrow \end{cases}$

$0 \leq x \leq a \Rightarrow 0 \leq a^{*}k \leq a \Rightarrow 0 \leq a^{*}k \leq a^{*}\text{mcd}(a,b)$

$\Rightarrow 0 \leq k \leq \text{mcd}(a,b)$

$0 \leq k \leq 3$

$k \to 3$
$k \to 2$
$k \to 1$
$k \to 0$

hay $\text{mcd}(a,b)+1$ posibilidades para k

$0 \leq y \leq b \Rightarrow 0 \leq b - b^{*}k \leq b \Rightarrow -b \leq -b^{*}k \leq 0$

$\Rightarrow b \geq b^{*}k \geq 0$

$\Rightarrow b^{*}\text{mcd}(a,b) \geq b^{*}k \geq 0$

$\Rightarrow \text{mcd}(a,b) \geq k \geq 0$

hay $\text{mcd}(a,b)+1$ posibles valores para k

$\Rightarrow$ hay $\text{mcd}(a,b)+1$ puntos de coordenadas enteras en el segmento.