Ecuaciones diofánticas lineales

$ax + by = c$ con $a,b,c \in \mathbb{Z}$

buscamos las soluciones enteras

Teorema: Sean $a,b,c \in \mathbb{Z}$ con $(a,b) \neq (0,0)$. Entonces

$$ax + by = c$$

* tiene solución sii $\text{mcd}(a,b) \mid c$
* si (x_0, y_0) es una solución particular

$$a\left(x_0 + \frac{bk}{\text{mcd}(a,b)}\right) + b\left(y_0 - \frac{ak}{\text{mcd}(a,b)}\right) = c$$

el conjunto de soluciones es

$$S = \left\{ \left(x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a,b)} k ,\ y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a,b)} k\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$= \{ (x_0 + b^* k ,\ y_0 - a^* k) : k \in \mathbb{Z} \}$$

Pasos para resolver una ecuación diofántica $ax + by = c$

1. chequeamos si $\text{mcd}(a,b) \mid c$ (si esto no pasa no hay soluciones)
2. buscamos una solución particular:

   $\text{mcd}(a,b) = d$

   $d \mid c \Rightarrow c = dq$ para algún $q \in \mathbb{Z}$

   por la igualdad de Bezout:

   $ax + by = d$ para algun $x, y \in \mathbb{Z}$

   $\cdot q \Big\downarrow$

   $a\underbrace{qx}_{x_0} + b\underbrace{qy}_{y_0} = \underbrace{dq}_{=c}$

3. escribimos el conjunto solución

Ejercicio 2.

a. Se desean comprar 430 dólares en cheques de viajero. Los cheques solamente vienen de 20 y de 50 dólares. ¿Cuántos cheques de cada cantidad deberán adquirirse?

b. La edad de Juan hace diez años, más la de Fátima hace diez años, suman un cuarto de la edad actual de Juan. ¿Qué edades, en años, tienen actualmente Juan y Fátima? (asuma que ambos tienen al menos diez años actualmente).

b) x = edad actual de Juan

y = edad actual de Fátima

$x-10$ = edad de Juan hace diez años

$y-10$ = edad de Fátima hace diez años

$$(x-10)+(y-10) = \frac{1}{4}x$$

$$x+y-20 = \frac{1}{4}x$$

$$4x+4y-80 = x$$

$$\boxed{3x+4y=80}$$

1 tiene solución?

como mcd(3,4) = 1 tenemos mcd(3,4) | 80 ✓

$\Rightarrow$ tiene solución

2 buscamos una solución particular:

[una solución particular es (20,5)

[igualdad de Bezout: $3(-1)+4\cdot 1 = 1$) $\times 80$

$3(-80)+4\cdot 80 = 80$

otra solución particular es $(-80, 80)$

nos quedamos con la solución particular (20, 5)

3 conjunto de soluciones:

$$3\left(20+\frac{4k}{1}\right)+4\left(5-\frac{3k}{1}\right) = 80$$

$$S = \{(20+4k,\ 5-3k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

nos interesan las soluciones con $x \geq 10$, $y \geq 10$

* $x \geq 10 \Rightarrow 20 + 4k \geq 10 \Rightarrow 4k \geq -10 \Rightarrow k \geq -2{,}5$

$\boxed{k \geq -2}$ porque $k \in \mathbb{Z}$

* $y \geq 10 \Rightarrow 5 - 3k \geq 10 \Rightarrow -5 \geq 3k \Rightarrow -1{,}66 \geq k$

$-3k \geq 5 \Leftrightarrow k \leq \frac{5}{-3}$ $\boxed{-2 \geq k}$

entonces $k = -2$ y la solución buscada es:

$$\begin{cases} x = 20 + 4(-2) = 12 \\ y = 5 - 3(-2) = 11 \end{cases}$$

Teorema de existencia de soluciones enteras no negativas

* Sean $a > 1$, $b > 1$ enteros y coprimos, entonces

$$ax + by = ab - a - b$$

no tiene soluciones enteras no negativas.

* si $n \geq ab - a - b + 1$ entonces

$$ax + by = n$$

tiene soluciones enteras no negativas

Ejercicio 7. Tenemos tickets de alimentación de 200 pesos y de 70 pesos, y en una tienda venden todos los productos a 10 pesos. Probar que, si nuestra compra supera los 113 productos, no tendremos inconveniente para pagar con tickets.

si n es la cantidad de productos que compramos

$10n$ es el monto a pagar

x = cantidad de tickets de 200

y = cantidad de tickets de 70

queremos ver si

$$200x + 70y = 10n$$

tiene soluciones enteras no negativas

$$200x + 70y = 10n \iff 20x + 7y = n$$

Por el teorema de existencia de soluciones enteras no negativas

$20x + 7y = n$ tiene soluciones enteras no negativas si

$$n \geq 20 \cdot 7 - 20 - 7 + 1 = 114$$

entonces no hay problema si compramos al menos 114 productos.

Ejercicio 4. Un hombre va a una ferretería a comprar un trozo de burlete de goma de x metros con y centímetros. Pero el ferretero confunde los metros con centímetros y viceversa, cortando una cantidad distinta de la que el cliente había pedido. Sin percatarse de ello, el cliente toma su paquete y se marcha. Cuando llega a su casa, corta 68 centímetros de burlete y, para su sorpresa, descubre que le queda el doble de lo que pensaba que había comprado. ¿Cuál es la menor cantidad de burlete (en metros y centímetros) que pudo haber pedido dicho cliente?

x = cantidad de metros que pidió

y = cantidad de cm que pidio

cantidad total de burlete en cm que pidió : $100x + y$

cantidad total de burlete en cm que le dieron: $100y + x$

lo que le dieron $- 68$ = 2 veces lo que pidió

$$100y + x - 68 = 2(100x + y)$$

$$100y + x - 68 = 200x + 2y$$

$$199x - 98y = -68$$

$$\boxed{199x - 98y = -68}$$

(1) $\text{mcd}(199, 98) = ?$

$$199 = 2 \cdot 98 + 3 \longrightarrow \text{mcd}(199, 98) = \text{mcd}(98, 3)$$

$98 = 3 \cdot 32 + 2 \rightarrow mcd(98,3) = mcd(3,2) = 1$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$$
\begin{aligned}
1 &= 3 - 2 \\
&= 3 - (98 - 3 \cdot 32) \qquad 3 + 3 \cdot 32 = 3 \cdot 33 \\
&= -98 + 3 \cdot 33 \\
&= -98 + (199 - 2 \cdot 98) \cdot 33 \\
&= 199 \cdot 33 - 98(2 \cdot 33 + 1) \\
&= 199 \cdot 33 - 98 \cdot 67
\end{aligned}
$$

$\boxed{199 \cdot 33 - 98 \cdot 67 = 1}$ $\quad mcd(199,98) = 1 \Rightarrow$ tiene solución

(2) solución particular: $\boxed{199x - 98y = -68}$

$199 \cdot 33 - 98 \cdot 67 = 1$

$\downarrow \times -68$

$199(33 \cdot (-68)) - 98(67 \cdot (-68)) = -68$

$199(-2244) + 98(4556) = -68 \rightarrow 199 \_\_ + 98 \_\_ = -68$

$199(-2244) - 98(-4556) = -68$

entonces una solución particular es $(-2244, -4556)$

Buscamos las soluciones de

$$199x - 98y = -68$$

① $mcd(199,98) = 1 \Rightarrow mcd(199,98) \mid -68$ ✓

② buscamos una solución particular:

igualdad de Bezout: $199 \cdot 33 - 98 \cdot 67 = 1$) $\times -68$

$$199 \cdot 33(-68) - 98 \cdot 67(-68) = -68$$

$$\boxed{199(-2244) - 98(-4556) = -68}$$

tenemos la solución particular $(-2244, -4556)$

③ escribimos el conjunto solución

$$S = \{(-2244 + 98k, -4556 + 199k) \; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$199(-2244 + \underbrace{98k}_{1}) - 98(-4556 + \underbrace{199k}_{1}) = -68$$

buscamos las soluciones tales que $x \geq 0$, $y \geq 0$

$$x \geq 0 \Rightarrow -2244 + 98k \geq 0 \Rightarrow k \geq \frac{2244}{98} = 22,89$$

$$\boxed{k \geq 23}$$

$$y \geq 0 \Rightarrow -4556 + 199k \geq 0 \Rightarrow k \geq \frac{4556}{199} = 22,89$$

$$\boxed{k \geq 23}$$

si $k = 23$

$x = -2244 + 98 \cdot 23 = 10$

$y = -4556 + 199 \cdot 23 = 21$

entonces pidió 10 metros y 21 cm