Ejercicio 6. En cada caso, hallar $a, b \in \mathbb{N}$ que verifiquen las condiciones dadas.

a. $ab = 22275$ y $\mathrm{mcd}(a,b) = 15$. Sugerencia: usar cofactores y factorizar en producto de primos.

b. $ab = 1008$ y $\mathrm{mcm}(a,b) = 168$. Recordar que: $\mathrm{mcm}(a,b) \cdot \mathrm{mcd}(a,b) = |a||b|,\ \forall\ a,b \in \mathbb{Z}$.

c. $a + b = 1271$ y $\mathrm{mcm}(a,b) = 330 \cdot \mathrm{mcd}(a,b)$.

d. $a + b = 122$ y $\mathrm{mcd}(a,b) + \mathrm{mcm}(a,b) = 1802$.

buscamos $a, b \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{cases} a+b = 1271 \\ \mathrm{mcm}(a,b) = 330\ \mathrm{mcd}(a,b) \end{cases}$$

Sea $d = \mathrm{mcd}(a,b)$

$a = da^*$ y $b = db^*$ donde a^* y b^* son coprimos

$$a + b = 1271 \Rightarrow da^* + db^* = 1271$$
$$\Rightarrow \boxed{d(a^* + b^*) = 1271}$$

$$\mathrm{mcm}(a,b) = 330\ \mathrm{mcd}(a,b) \Rightarrow \frac{ab}{\mathrm{mcd}(a,b)} = 330\ \mathrm{mcd}(a,b)$$
$$\Rightarrow \frac{da^* db^*}{d} = 330 d$$
$$\Rightarrow da^* b^* = 330 d$$
$$\Rightarrow \boxed{a^* b^* = 330}$$

entonces buscamos a^* y b^* coprimos tales que

$$\begin{cases} d(a^* + b^*) = 1271 \longrightarrow a^* + b^* \mid 1271 \\ a^* b^* = 330 \end{cases}$$

vamos a escribir 330 como producto de primos:

$$330 = 2 \cdot 165 = 2 \cdot 3 \cdot 55 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

$$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

divisores de 1271: $1 \cdot 1271 = 1271$

$31 \cdot 41 = 1271$

primos

$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$

2 y $3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$ son divisores coprimos de 330 pero la suma no da ni 31 ni 41

6 y 55 ✗

$\boxed{30 \text{ y } 11}$ ✓ la suma $30 + 11 = 41$ es un divisor de 1271

10 y 33 ✗

22 y 15 ✗

5 y $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$ ✗

3 y $2 \cdot 5 \cdot 11 = 110$ ✗

$$\left.\begin{array}{l} a^* b^* = 330 \\ a^* + b^* \mid 1271 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} ① \ a^* = 30 \text{ y } b^* = 11 \\ ② \ a^* = 11 \text{ y } b^* = 30 \end{array}$$

Además teníamos: $d(a^* + b^*) = 1271$

entonces como $a^* + b^* = 41$ tenemos que $d = 31$

① $d = 31$, $a^* = 30$ y $b^* = 11$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = da^* = 31 \cdot 30 = 930 \\ b = db^* = 31 \cdot 11 = 341 \end{cases}$$

② $d = 31$, $a^* = 11$ y $b^* = 30$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 31 \cdot 11 = 341 \\ b = 31 \cdot 30 = 930 \end{cases}$$

d. $a + b = 122$ y $\mathrm{mcd}(a, b) + \mathrm{mcm}(a, b) = 1802$.

$a, b \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{cases} a + b = 122 \\ \mathrm{mcd}(a,b) + \mathrm{mcm}(a,b) = 1802 \end{cases}$$

Sea $d = \mathrm{mcd}(a,b)$

$\Rightarrow a = da^*$ y $b = db^*$ con a^* y b^* coprimos

$122 = a + b = da^* + db^* = d(a^* + b^*)$

$$\boxed{122 = d(a^* + b^*)}$$

$$1802 = mcd(a,b) + mcm(a,b)$$
$$= d + \frac{ab}{d}$$
$$= d + \frac{da^* db^*}{d}$$
$$= d + da^*b^*$$
$$= d(1+a^*b^*)$$

$$\boxed{1802 = d(1+a^*b^*)}$$

buscamos d, a^* y b^* tales que:

$$\begin{cases} 122 = d(a^*+b^*) \\ 1802 = d(1+a^*b^*) \end{cases}$$

$\Rightarrow d \mid 122$ y $d \mid 1802$

vamos a buscar los divisores comunes a 122 y 1802

Divisores de 122: $122 \cdot 1 = 122$
$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{primo}}}{61} \cdot 2 = 122$

Divisores comunes a 122 y 1802 : 1 y 2

* $\underline{d=2}$

$$\begin{cases} 122 = 2(a^*+b^*) \longrightarrow a^*+b^* = 61 \\ 1802 = 2(1+a^*b^*) \rightarrow 1+a^*b^* = 901 \rightarrow a^*b^* = 900 \end{cases}$$

vamos a escribir 900 como producto de primos

$$900 = 3^2 \cdot 100 = 3^2 \cdot 25 \cdot 4 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

divisores coprimos de 900:

* $\underset{\substack{\uparrow \\ 2^2}}{4} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 3^2 \cdot 5^2}}{225} = 900$ no sirve porque $4+225 \neq 61$

* $\underset{\substack{\uparrow \\ 2^2 \cdot 3^2}}{36} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 5^2}}{25} = 900$ ✓ porque $36+25 = 61$

* $\underset{\substack{\uparrow \\ 3^2}}{9} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 2^2 \cdot 5^2}}{100} = 900$ ✗ porque $9+100 \neq 61$

① $a^* = 36$ y $b^* = 25$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2\cdot 36 = 72 \\ b = 2\cdot 25 = 50 \end{cases}$$

② $a^* = 25$ y $b^* = 36$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 72 \\ a = 50 \end{cases}$$

* $\underline{d = 1}$

$$\begin{cases} 122 = a^* + b^* \\ 1802 = 1 + a^* b^* \end{cases} \rightarrow 1801 = a^* b^*$$

Divisores de 1801: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{primo}}}{1801} \cdot 1 = 1801$ no hay soluciones.

Algoritmo de Euclides extendido

Ejercicio 1. En cada caso usar el Algoritmo de Euclides Extendido para calcular el $\operatorname{mcd}(a, b)$ y coeficientes de Bezout de a y b.

a. $a = 63$, $b = 15$.

b. $a = 455$, $b = 1235$.

c. $a = 2366$, $b = 273$.

b) buscamos $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $\underbrace{\operatorname{mcd}(1235, 455)}_{= 65} = 1235x + 455y$

$\operatorname{mcd}(1235, 455) = ?$

$1235 = 455 \cdot 2 + 325 \rightarrow 325 = 1235 - 2\cdot 455$

$455 = 325 \cdot 1 + 130 \rightarrow 130 = 455 - 325$

$325 = 130 \cdot 2 + 65 \longrightarrow 65 = 325 - 130\cdot 2$

$130 = 65 \cdot 2 + 0 \Rightarrow \operatorname{mcd}(1235, 455) = 65$

$$\begin{aligned} 65 &= 325 - 2\cdot \underline{130} \\ &= 325 - 2(455 - 325) \\ &= 3\cdot 325 - 2\cdot 455 \\ &= 3\cdot(1235 - 2\cdot 455) - 2\cdot 455 \\ &= 3\cdot 1235 - 8\cdot 455 \end{aligned}$$

Entonces $\underbrace{65 = 3\cdot 1235 - 8\cdot 455}_{\text{identidad de Bezout}}$

$$mcd(1235, 455) = 1235x + 455y$$

otra forma:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1235 \\ 455 \end{pmatrix}$$

como $1235 = 2 \cdot 455 + 325 \longrightarrow 325 = 1235 - 2 \cdot 455$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 455 \\ 325 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1235 \\ 455 \end{pmatrix}$$

como $455 = 325 + 130 \longrightarrow 130 = 455 - 325$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 325 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 455 \\ 325 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1235 \\ 455 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1235 \\ 455 \end{pmatrix}$$

como $325 = 130 \cdot 2 + 65 \longrightarrow 65 = 325 - 2 \cdot 130$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 130 \\ \boxed{65} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 325 \\ 130 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1235 \\ 455 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1235 \\ 455 \end{pmatrix}$$

$130 = 65 \cdot 2 + 0 \implies mcd(1235, 455) = 65$

$$\begin{pmatrix} 130 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1235 \\ 455 \end{pmatrix}$$

$$\implies 65 = 3 \cdot 1235 - 8 \cdot 455$$

Ejercicio 7. Hallar $\operatorname{mcd}(a,b)$ sabiendo que $\operatorname{mcd}(a,b)\cdot\operatorname{mcm}(a,b)=48$ y $a^2=b^2+28$.

$$\begin{cases} \operatorname{mcd}(a,b)\cdot\operatorname{mcm}(a,b)=48 \\ a^2=b^2+28 \end{cases}$$

$d=\operatorname{mcd}(a,b)$

$$48=\operatorname{mcd}(a,b)\,\operatorname{mcm}(a,b)=d\,\frac{ab}{d}=ab$$

$\Rightarrow ab=48$ $\qquad 48=2^3\cdot 6=2^4\cdot 3$

Divisores de 48:

$a^2=b^2+28$

$1\cdot 48=48 \rightarrow 48^2=1^2+28\ ?\ \times$

$2\cdot 24=48 \rightarrow 24^2=2^2+28\ ?\ \times$

$3\cdot 16=48 \rightarrow 16^2=3^2+28\ ?\ \times$

$4\cdot 12=48 \rightarrow 12^2=4^2+28\ ?\ \times$

$8\cdot 6=48 \rightarrow \underset{64}{\underset{\shortparallel}{8^2}}=\underbrace{6^2+28}_{\underset{64}{\shortparallel}}\ ?\ \checkmark$

$\Rightarrow a=\overset{2^3}{\overset{\shortparallel}{8}}$ y $b=\overset{2\cdot 3}{\overset{\shortparallel}{6}}$

$\Rightarrow \operatorname{mcd}(a,b)=\operatorname{mcd}(8,6)=2$