

Primer teorema de isomorfismo

* $f: G_1 \rightarrow G_2$ morfismo de grupos sobreyectivo

$$G_1 / \ker f \cong G_2$$

* $f: G_1 \rightarrow G_2$ morfismo de grupos

$$G_1 / \ker f \cong \text{Im } f$$

Ejercicio 7. Sea G un grupo. Probar que $G/\{e\} \cong G$ y $G/G \cong \{e\}$.

Sea G un grupo.

* $G/\{e\} \cong G$

buscamos un morfismo de grupos $f: G \rightarrow G$ sobreyectivo tal que $\ker f = \{e\}$

si tenemos eso, por el primer teorema de isomorfismo

$$\underbrace{G / \ker f}_{\{e\}} \cong G \quad \Rightarrow \quad G / \{e\} \cong G$$

consideramos $\text{id}: G \rightarrow G$

$$\text{id}(g) = g$$

① $\text{id}: G \rightarrow G$ es morfismo de grupos?

$$\underbrace{\text{id}(g * g')}_{g * g'} = \underbrace{\text{id}(g)}_g * \underbrace{\text{id}(g')}_{g'}$$

② $\text{id}: G \rightarrow G$ es sobreyectivo?

$$\text{si } g \in G, \quad g = \text{id}(g)$$

③ $\ker(\text{id}) = \{e\}$?

$$x \in \ker(\text{id}) \Leftrightarrow \text{id}(x) = e$$

$$\Leftrightarrow x = e$$

$$\text{entonces } \ker(\text{id}) = \{e\}$$

Entonces tenemos $\text{id}: G \rightarrow G$ morfismo de grupos sobreyectivo

\Rightarrow por el primer teorema de isomorfismo

$$G / \ker(\text{id}) \cong G$$

pero $\ker(\text{id}) = \{e\}$, por lo tanto $G / \{e\} \cong G$

* $\overset{\text{sobre}}{\curvearrowright} G / G \cong \{e\}$

buscamos $f: G \rightarrow \{e\}$ morfismo de grupos sobreyectivo

consideramos $f: G \rightarrow \{e\}$

$$f(g) = e$$

① f es morfismo de grupos?

$$\underbrace{f(g * g')}_{e} \stackrel{?}{=} \underbrace{f(g)}_e * \underbrace{f(g')}_{e} \quad \checkmark$$

② f es sobreyectivo?

$$f(g) = e \Rightarrow \text{Im } f = \{e\}$$

③ $\ker f$?

$$g \in \ker f \Leftrightarrow f(g) = e \Leftrightarrow g \in G$$

$$\text{entonces } \ker f = G$$

Entonces tenemos $f: G \rightarrow \{e\}$ morfismo de grupos sobreyectivo

\Rightarrow por el primer teorema de isomorfismo

$$G / \ker f \cong \{e\}$$

pero como $\ker f = G$, tenemos $G / G \cong \{e\}$

Ejercicio 10. Se consideran los siguientes subconjuntos de plano complejo \mathbb{C} :

$$G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad H = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

- Probar que G y H son subgrupos de \mathbb{C} .
- Probar que $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$, dado por $\phi(x) = e^{2\pi i x}$ es un morfismo de grupos sobreyectivo.
- Probar que G es isomorfo al grupo aditivo \mathbb{R}/\mathbb{Z} . $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong G$
- Probar que H es isomorfo al grupo aditivo \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .

a) * G es un subgrupo de \mathbb{C} con el producto

① el neutro de \mathbb{C} está en G

el neutro de \mathbb{C} es 1

$$|1| = 1 \Rightarrow 1 \in G$$

② G es cerrado bajo el producto

sean $z, z' \in G$, queremos ver que $zz' \in G$

$$z \in G \Rightarrow |z| = 1$$

$$z' \in G \Rightarrow |z'| = 1$$

$$|zz'| = |z||z'| = 1 \Rightarrow zz' \in G$$

③ G es cerrado bajo inversos

sea $z \in G$, queremos ver que $z^{-1} \in G$

$$z \in G \Rightarrow |z| = 1$$

$$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} = 1 \Rightarrow z^{-1} \in G$$

$$zz^{-1} = 1 \Rightarrow |zz^{-1}| = 1$$

$$\Rightarrow |z||z^{-1}| = 1$$

$$\Rightarrow |z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$$

* H es un subgrupo de \mathbb{C}

$$H = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

① el neutro de \mathbb{C} está en H

el neutro de \mathbb{C} es 1

$$1^1 = 1 \Rightarrow 1 \in H$$

② H es cerrado bajo el producto

sean $z, z' \in H$, queremos ver que $zz' \in H$

$$(zz')^k = 1 \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$z \in H \Rightarrow z^n = 1 \text{ para alg\u00fan } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

$$z' \in H \Rightarrow (z')^m = 1 \text{ para alg\u00fan } m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$$

$$(zz')^{nm} = z^{nm} (z')^{nm} = (z^n)^m (z')^m = 1^m 1^m = 1$$

$$\Rightarrow zz' \in H$$

(3) H es cerrado bajo inversos

Sea $z \in H$, queremos ver que $z^{-1} \in H$

$$z \in H \Rightarrow z^n = 1 \text{ para alg\u00fan } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

$$(z^{-1})^n = (z^n)^{-1} = 1^{-1} = 1 \Rightarrow z^{-1} \in H$$

b) $\phi: \mathbb{R} \rightarrow G$, $\phi(x) = e^{2\pi i x}$

suma

producto

$$G = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$$

* ϕ es morfismo de grupos:

Sean $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{queremos ver que } \phi(x+y) = \phi(x) \phi(y)$$

$$\phi(x+y) = e^{2\pi i(x+y)} = e^{2\pi i x + 2\pi i y} = e^{2\pi i x} e^{2\pi i y} = \phi(x) \phi(y)$$

* ϕ es sobreyectivo:

$$\phi(x) = e^{2\pi i x}$$

Sea $z \in G$, buscamos $x \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) = z$

$$z \in G \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\alpha} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} |z| \\ \arg(z) = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow z = |z| e^{i\alpha}$$

$$z = \phi(x)$$

$$\Rightarrow e^{i\alpha} = e^{2\pi i \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\text{entonces } \underbrace{\phi\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)}_{\in \mathbb{R}} = e^{2\pi i \frac{\alpha}{2\pi}} = e^{i\alpha} = z$$

entonces ϕ es sobreyectivo.

c. Probar que G es isomorfo al grupo aditivo \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Queremos probar $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong G$

Tenemos $\phi: \mathbb{R} \rightarrow G$ morfismo de grupos sobreyectivo

$$\phi(x) = e^{2\pi i x}$$

entonces por el primer teorema de isomorfismo

$$\mathbb{R}/\ker\phi \cong G$$

veamos que $\ker\phi = \mathbb{Z}$

$$x \in \ker\phi \Leftrightarrow \phi(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2\pi i x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2\pi x) = 1 \\ \sin(2\pi x) = 0 \end{cases}$$

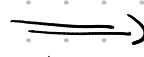
$$\Leftrightarrow 2\pi x = 2\pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$$

entonces $\ker\phi = \mathbb{Z}$

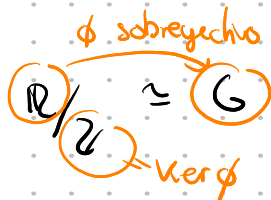
$\phi: \mathbb{R} \rightarrow G$ morfismo de grupos sobreyectivo

$$\ker\phi = \mathbb{Z}$$

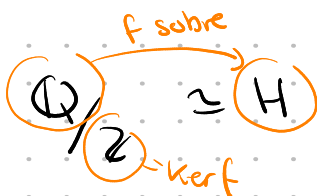


primer
teorema
de isomorfismo

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong G$$



d. Probar que H es isomorfo al grupo aditivo \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .



① morfismo de grupos
sobreyectivo $f: \mathbb{Q} \rightarrow H$

② aplicar por teorema de isomorfismo

$$\mathbb{Q}/\ker f \cong H$$

③ ver que $\ker f = \mathbb{Z}$

$$H = \{ z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \text{ para alg\u00fan } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \}$$

① morfismo de grupos sobreyectivo de \mathbb{Q} en H

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow H$$

\swarrow suma \swarrow producto

$$f(q) = e^{2\pi i q}$$

* f es morfismo de grupos

$$f(q+q') \stackrel{?}{=} f(q)f(q')$$

$$f(q+q') = e^{2\pi i(q+q')} = e^{2\pi i q + 2\pi i q'} = e^{2\pi i q} e^{2\pi i q'} = f(q)f(q')$$

* f es sobreyectivo

Sea $z \in H$, busquemos $q \in \mathbb{Q}$ tal que $f(q) = z$

$$z \in H \Rightarrow z^n = 1 \text{ para alg\u00fan } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

$$\Rightarrow |z^n| = 1$$

$$\Rightarrow |z|^n = 1$$

$$\Rightarrow |z| = 1$$

$$\text{entonces } z \in H \Rightarrow z = e^{i\alpha}$$

$$z^n = 1 \Rightarrow (e^{i\alpha})^n = 1$$

$$\Rightarrow e^{i\alpha n} = 1$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha n) + i \sin(\alpha n) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha n) = 1 \\ \sin(\alpha n) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha n = 2\pi k \text{ para alg\u00fan } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi k}{n}$$

$$z \in H \Rightarrow z = e^{i \frac{2\pi k}{n}}$$

$$f(q) = e^{2\pi i q}$$

$$f(q) = z = e^{i \frac{2\pi k}{n}} = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$$

$$\Rightarrow z = f\left(\frac{k}{n}\right), \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$$

$\Rightarrow f$ es sobreyectiva

② Aplicamos el primer teorema de isomorfismo

$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{H}$ morfismo de grupos sobrejetivo

$$\Rightarrow \mathbb{Q}/\ker f \cong \mathbb{H}$$

③ Veamos que $\ker f = \mathbb{Z}$

$$q \in \ker f \Leftrightarrow f(q) = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2\pi i q} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(2\pi q) + i \sin(2\pi q) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2\pi q) = 1 \\ \sin(2\pi q) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi q = 2\pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow q \in \mathbb{Z}$$

entonces $\ker f = \mathbb{Z}$

Entonces $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{H}$