Primer teorema de isomorfismo

* $f: G_1 \to G_2$ morfismo de grupos sobreyectivo

$$G_1 / \ker f \simeq G_2$$

* $f: G_1 \to G_2$ morfismo de grupos

$$G_1 / \ker f \simeq \operatorname{Im} f$$

Ejercicio 7. Sea G un grupo. Probar que $G/\{e\} \simeq G$ y $G/G \simeq \{e\}$.

Sea G un grupo

* $G/\{e\} \simeq G$

buscamos un morfismo de grupos $f: G \to G$ sobreyectivo tal que $\ker f = \{e\}$

si tenemos eso, por el primer teorema de isomorfismo

$$G / \underbrace{\ker f}_{\{e\}} \simeq G \Rightarrow G/\{e\} \simeq G$$

consideramos $id: G \to G$

$$id(g) = g$$

① $id: G \to G$ es morfismo de grupos ?

$$\underbrace{id(g * g')}_{g * g'} = \underbrace{id(g)}_{g} * \underbrace{id(g')}_{g'} \quad \checkmark$$

② $id: G \to G$ es sobreyectivo ?

si $g \in G$, $g = id(g)$ ✓

③ $\ker(id) = \{e\}$?

$$x \in \ker(id) \iff id(x) = e$$
$$\iff x = e$$

entonces $Ker(id) = \{e\}$

Entonces tenemos $id : G \to G$ morfismo de grupos sobreyectivo
$\Rightarrow$ por el primer teorema de isomorfismo

$$G/_{Ker(id)} \simeq G$$

pero $Ker(id) = \{e\}$, por lo tanto $G/_{\{e\}} \simeq G$

sobre

* $G/_G \simeq \{e\}$

buscamos $f : G \to \{e\}$ morfismo de grupos sobreyectivo

consideramos $f : G \to \{e\}$
$$f(g) = e$$

1. f es morfismo de grupos ?

$$\underbrace{f(g * g')}_{e} \overset{?}{=} \underbrace{f(g)}_{e} * \underbrace{f(g')}_{e} \quad \checkmark$$

2. f es sobreyectivo ?

$f(g) = e \Rightarrow Im f = \{e\}$

3. Ker f ?

$g \in Ker f \Leftrightarrow f(g) = e \Leftrightarrow g \in G$

entonces $Ker f = G$

Entonces tenemos $f : G \to \{e\}$ morfismo de grupos sobreyectivo
$\Rightarrow$ por el primer teorema de isomorfismo

$$G/_{Ker f} \simeq \{e\}$$

pero como $Ker f = G$, tenemos $G/_G \simeq \{e\}$

Ejercicio 10. Se consideran los siguientes subconjuntos de plano complejo $\mathbb{C}$:

$$G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad H = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

a. Probar que G y H son subgrupos de $\mathbb{C}$.

b. Probar que $\phi : \mathbb{R} \to G$, dado por $\phi(x) = e^{2\pi i x}$ es un morfismo de grupos sobreyectivo.

c. Probar que G es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq G$

d. Probar que H es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

a) * G es un subgrupo de $\mathbb{C}$ ← con el producto

① el neutro de $\mathbb{C}$ está en G

el neutro de $\mathbb{C}$ es 1

$|1| = 1 \Rightarrow 1 \in G$

② G es cerrado bajo el producto

sean $z, z' \in G$, queremos ver que $zz' \in G$ $\quad |zz'| = 1$

$z \in G \Rightarrow |z| = 1$

$z' \in G \Rightarrow |z'| = 1$

$|zz'| = |z||z'| = 1 \Rightarrow zz' \in G$

③ G es cerrado bajo inversos

sea $z \in G$, queremos ver que $z^{-1} \in G$ $\quad |z^{-1}| = 1$

$z \in G \Rightarrow |z| = 1$

$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} = 1 \Rightarrow z^{-1} \in G$

$zz^{-1} = 1 \Rightarrow |zz^{-1}| = 1$

$\Rightarrow |z||z^{-1}| = 1$

$\Rightarrow |z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$

* H es un subgrupo de $\mathbb{C}$

$H = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

① el neutro de $\mathbb{C}$ está en H

el neutro de $\mathbb{C}$ es 1

$1^1 = 1 \Rightarrow 1 \in H$

② H es cerrado bajo el producto $\quad (zz')^k = 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$

sean $z, z' \in H$, queremos ver que $zz' \in H$

$z \in H \Rightarrow z^n = 1$ para algún $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

$z' \in H \Rightarrow (z')^m = 1$ para algún $m \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

$$(zz')^{nm} = z^{nm}(z')^{nm} = (z^n)^m((z')^m)^n = 1^m 1^n = 1$$

$\Rightarrow zz' \in H$

(3) H es cerrado bajo inversos

Sea $z \in H$, queremos ver que $z^{-1} \in H$ $\quad (z^{-1})^k = 1$

$z \in H \Rightarrow z^n = 1$ para algún $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

$(z^{-1})^n = (z^n)^{-1} = 1^{-1} = 1 \Rightarrow z^{-1} \in H$

b) $\phi : \underset{\text{suma}}{\mathbb{R}} \to \underset{\text{producto}}{G}$, $\phi(x) = e^{2\pi i x}$

$G = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$

* ϕ es morfismo de grupos:

sean $x, y \in \mathbb{R}$

queremos ver que $\phi(x+y) = \overbrace{\phi(x)}^{e^{2\pi i x}} \overbrace{\phi(y)}^{e^{2\pi i y}}$

$$\phi(x+y) = e^{2\pi i (x+y)} = e^{2\pi i x + 2\pi i y} = e^{2\pi i x} e^{2\pi i y} = \phi(x)\phi(y)$$

* ϕ es sobreyechivo: $\quad \phi(x) = e^{2\pi i x}$

sea $z \in G$, buscamos $x \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) = z$

$z \in G \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} |z| \\ \arg(z) = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow z = |z| e^{i\alpha}$ $\quad z = \phi(x)$

$\Rightarrow e^{i\alpha} = e^{2\pi i x} \quad x = \frac{\alpha}{2\pi}$

entonces $\phi(\underbrace{\tfrac{\alpha}{2\pi}}_{\in \mathbb{R}}) = e^{2\pi i \frac{\alpha}{2\pi}} = e^{i\alpha} = z$

entonces ϕ es sobreyechiva.

c. Probar que G es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Queremos probar $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq G$

Tenemos $\phi : \mathbb{R} \to G$ morfismo de grupos sobreyectivo
$\phi(x) = e^{2\pi i x}$

entonces por el primer teorema de isomorfismo

$$\mathbb{R}/\ker\phi \simeq G$$

veamos que $\ker\phi = \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} x \in \ker\phi &\iff \phi(x) = 1 \\ &\iff e^{2\pi i x} = 1 \\ &\iff \cos(2\pi x) + i\,\text{sen}(2\pi x) = 1 \\ &\iff \begin{cases} \cos(2\pi x) = 1 \\ \text{sen}(2\pi x) = 0 \end{cases} \\ &\iff 2\pi x = 2\pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

entonces $\ker\phi = \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} \phi : \mathbb{R} \to G \text{ morfismo de grupos sobreyectivo} \\ \ker\phi = \mathbb{Z} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{de isomorfismo}]{\text{primer teorema}} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq G$$

ϕ sobreyectivo

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq G$$

$\ker\phi$

d. Probar que H es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

f sobre

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq H$$

$\ker f$

① morfismo de grupos sobreyectivo $f : \mathbb{Q} \to H$

② aplicar 1er teorema de isomorfismo

$$\mathbb{Q}/\ker f \simeq H$$

③ ver que $\ker f = \mathbb{Z}$

$H = \{ z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \}$

① morfismo de grupos sobreyectivo de $\mathbb{Q}$ en H

$$f : \underset{\text{suma}}{\mathbb{Q}} \longrightarrow \underset{\text{producto}}{H}$$
$$f(q) = e^{2\pi i q}$$

* f es morfismo de grupos

$$f(q+q') \overset{?}{=} f(q) f(q')$$

$$f(q+q') = e^{2\pi i (q+q')} = e^{2\pi i q + 2\pi i q'} = e^{2\pi i q} e^{2\pi i q'} = f(q) f(q')$$

* f es sobreyectivo

Sea $z \in H$, buscamos $q \in \mathbb{Q}$ tal que $f(q) = z$

$z \in H \Rightarrow z^n = 1$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$

$\Rightarrow |z^n| = 1$

$\Rightarrow |z|^n = 1$

$\Rightarrow |z| = 1$

entonces $z \in H \Rightarrow z = e^{i\alpha}$

$z^n = 1 \Rightarrow (e^{i\alpha})^n = 1$

$\Rightarrow e^{i\alpha n} = 1$

$\Rightarrow \cos(\alpha n) + i \operatorname{sen}(\alpha n) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha n) = 1 \\ \operatorname{sen}(\alpha n) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha n = 2\pi k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi k}{n}$

$z \in H \Rightarrow z = e^{i \frac{2\pi k}{n}}$

$$\left.\begin{array}{l} f(q) = e^{2\pi i q} \\ f(q) = z = e^{i\frac{2\pi k}{n}} = e^{2\pi i \frac{k}{n}} \end{array}\right\} \Rightarrow z = f\left(\tfrac{k}{n}\right), \ \tfrac{k}{n} \in \mathbb{Q}$$

$\Rightarrow$ f es sobreyectiva

(2) Aplicamos el primer teorema de isomorfismo

$f: \mathbb{Q} \to H$ morfismo de grupos sobreyectivo

$\Rightarrow \mathbb{Q}/\ker f \simeq H$

(3) Veamos que $\ker f = \mathbb{Z}$

$q \in \ker f \iff f(q) = 1$

$\iff e^{2\pi i q} = 1$

$\iff \cos(2\pi q) + i \operatorname{sen}(2\pi q) = 1$

$\iff \begin{cases} \cos(2\pi q) = 1 \\ \operatorname{sen}(2\pi q) = 0 \end{cases}$

$\iff 2\pi q = 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\iff q \in \mathbb{Z}$

entonces $\ker f = \mathbb{Z}$

Entonces $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq H$