Ejercicio 2.

a. Sea G un grupo conmutativo. Pruebe que todo subgrupo H de G es normal en G.

b. Pruebe que $H = 3\mathbb{Z}$ es normal en $G = (\mathbb{Z}, +)$. Calcule el grupo cociente $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y su tabla de Cayley.

c. Sea G un grupo cíclico. Pruebe que todo subgrupo H de G es normal en G. Sugerencia: pruebe que G es conmutativo.

d. Pruebe que $H = \{\bar{1}, \bar{8}\}$ es subgrupo normal en $G = U(9)$. Halle el cociente G/H y calcule $(\bar{2}H)(\bar{4}H)$.

c) G un grupo cíclico

sea H un subgrupo de G

queremos ver que H es un subgrupo normal de G

Afirmación: Si G es cíclico, entonces G es conmutativo

G es cíclico $\Rightarrow$ $\langle g \rangle = G$ para algún $g \in G$

Sean $x, y \in G$, queremos ver que $xy = yx$

$x = g^k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

$y = g^m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$

$$xy = g^k g^m = \underbrace{gg\cdots g}_{k \text{ veces}}\underbrace{g g\cdots g}_{m \text{ veces}}$$

$$= \underbrace{gg\cdots g}_{m \text{ veces}}\underbrace{g g\cdots g}_{k \text{ veces}}$$

$$= g^m g^k$$

$$= yx$$

Conclusión: G cíclico $\Rightarrow$ G es conmutativo $\Rightarrow$ todo subgrupo de G es normal

parte a)

$\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$

d) $G = U(9) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}\}$

$|U(9)| = \varphi(9) = 9\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 9 \cdot \frac{2}{3} = 6$

$U(9)$ es cíclico?

orden de $\bar{2}$: $\bar{2}^2 = \bar{2} \times \bar{2} = \overline{2 \times 2} = \bar{4}$

$\bar{2}^3 = \bar{4} \times \bar{2} = \bar{8}$

$\bar{2}^4 = \bar{8} \times \bar{2} = \overline{16} = \bar{7}$

$\bar{2}^5 = \bar{7} \times \bar{2} = \overline{14} = \bar{5}$

$\bar{2}^6 = \bar{5} \times \bar{2} = \overline{10} = \bar{1}$

$\Rightarrow o(\bar{2}) = 6$

$\Rightarrow \bar{2}$ es un generador de $U(9)$

$\Rightarrow U(9)$ es cíclico

$\Rightarrow$ todo subgrupo de $U(9)$ es normal

$\Rightarrow H = \{\bar{1}, \bar{8}\}$ es un subgrupo normal

$H = \{\bar{1}, \bar{8}\}$ es normal $\Rightarrow U(9)/_H$ es un grupo con la operación

$$\underbrace{(aH) \times (bH)}_{\text{producto en } U(9)/_H} = \underbrace{(ab)}_{\text{producto en } U(9)} H$$

$U(9)/_H = \{gH : g \in U(9)\}$ $\quad$ $U(9) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}\}$

$H = \{\bar{1}, \bar{8}\}$

$\bar{1}H = \{\bar{1} \times \bar{1}, \bar{1} \times \bar{8}\} = \{\bar{1}, \bar{8}\} = \bar{8}H$

$\bar{2}H = \{\bar{2} \times \bar{1}, \bar{2} \times \bar{8}\} = \{\bar{2}, \bar{7}\} = \bar{7}H$

$\bar{4}H = \{\bar{4} \times \bar{1}, \bar{4} \times \bar{8}\} = \{\bar{4}, \bar{5}\} = \bar{5}H$

$U(9)/_H = \{\bar{1}H, \bar{2}H, \bar{4}H\}$

$(\bar{2}H)(\bar{4}H) = (\bar{2} \times \bar{4})H = \bar{8}H = \bar{1}H$

$\{\bar{2}, \bar{7}\}\{\bar{4}, \bar{5}\}$ $\quad$ producto en $U(9)$

$(\bar{2}H)(\bar{4}H) = \bar{1}H$

Ejercicio 3. Sea $GL_2(\mathbb{R})$ el grupo de las matrices invertibles 2×2 de coeficientes reales, con el producto usual de matrices. Sean

$$U = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \ / \ A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \underbrace{T = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \ / \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\}}_{\text{subgrupo de } GL_2(\mathbb{R})}.$$

a. Pruebe que U es un subgrupo de T.

b. Calcule las clases laterales por derecha y por izquierda de U en T.

c. Pruebe que U es un subgrupo normal de T.

d. Pruebe que U es un subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$, y determine si U es un subgrupo normal de $GL_2(\mathbb{R})$.

a) U es subgrupo de T:

1 cerrado por la operación: $A, B \in U$, queremos ver que $AB \in U$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y+x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$$

2 $e_T \in U$

$$e_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$$

3 cerrado por inversos: $A \in U \Rightarrow A^{-1} \in U$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x+x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$$

b) $U = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$T = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\}$

* clases laterales a izquierda de U en T

sea $A \in T$

$$AU = \{ AB : B \in U \}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ fija

$$AU = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} B : B \in U \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & ax+b \\ 0 & c \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

* clases laterales a derecha de U en T

$A \in T$ fija

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

$$UA = U \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \left\{ B \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : B \in U \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b+cx \\ 0 & c \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

c) Queremos ver que U es un subgrupo normal de T

$$AU = UA \quad \text{para todo } A \in T$$

$$AU = \left\{ \begin{pmatrix} a & ax+b \\ 0 & c \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \qquad UA = \left\{ \begin{pmatrix} a & b+cx \\ 0 & c \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

* $AU \subset UA$?

tomamos $\begin{pmatrix} a & ax+b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in AU$

queremos probar que $\begin{pmatrix} a & ax+b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in UA = \{ CA : C \in U \}$

es decir, buscamos $B \in U$ tal que

$$\underbrace{B \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}}_{\in UA} = \begin{pmatrix} a & ax+b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$B \in U \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ y \in \mathbb{R}$$

entonces buscamos $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a & b+cy \\ 0 & c \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & ax+b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

buscamos y tal que $b+cy = ax+b$

$$\Rightarrow cy = ax$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{c}x$$

<u>conclusión</u>:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c}x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in U}\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} a & ax+b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & ax+b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in UA$$

$$\Rightarrow AU \subset UA$$

* $UA \subset AU$?

tomamos $\begin{pmatrix} a & b+cx \\ 0 & c \end{pmatrix} \in UA$

buscamos $B \in U$ tal que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} B}_{\in AU} = \begin{pmatrix} a & b+cx \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$B \in U \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $y \in \mathbb{R}$

buscamos y tal que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a & ay+b \\ 0 & c \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & b+cx \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

buscamos y tal que $ay+b = b+cx$

$$\Rightarrow ay = cx$$

$$\Rightarrow y = \frac{c}{a}x$$

<u>conclusión</u>

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{a}x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in U} = \begin{pmatrix} a & b+cx \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b+cx \\ 0 & c \end{pmatrix} \in AU$$

entonces $UA \subset AU$

<u>Conclusión</u>: $\left.\begin{matrix} AU \subset UA \\ UA \subset AU \end{matrix}\right\} \Rightarrow AU = UA \Rightarrow U$ es subgrupo normal de T

a) $U = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$T = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\}$

$GL_2(\mathbb{R})$

U es subgrupo normal de T

¿U es subgrupo normal de $GL_2(\mathbb{R})$?

vamos a calcular la clase lateral a izquierda y la clase lateral a derecha de una matriz en $GL_2(\mathbb{R})$ que no está en T

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

* clase lateral a izquierda de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} B : B \in U \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ 2 & 2x+1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

* clase lateral a derecha de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$U \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ B \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} : B \in U \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1+2x & 1+x \\ 2 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ 2 & 2x+1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2x & 1+x \\ 2 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} U$ pero $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \notin U \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} U \neq U \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow U$ no es subgrupo normal de $GL_2(\mathbb{R})$