Clases laterales

$(G, *)$ un grupo, H un subgrupo de G, g un elemento de G

- la clase lateral por izquierda asociada a g es el conjunto

$$gH = \{ g*h : h \in H \}$$

= clase de equivalencia de g para la relación de equivalencia

$$g_1 \sim g_2 \text{ sii } g_1 = g_2 * h \text{ para algún } h \in H$$

$$\bar{g} = \{ g_1 \in G : g_1 \sim g_2 \} = \{ g_1 \in G : g_1 = g*h \}$$

→ las clases laterales por izquierda forman una partición de G

- la clase lateral por derecha asociada a g es el conjunto

$$Hg = \{ h * g : h \in H \}$$

= clase de equivalencia de g para la relación de equivalencia

$$g_1 \sim g_2 \text{ sii } g_1 = h * g_2 \text{ para algún } h \in H$$

→ las clases laterales por derecha forman una partición de G

Subgrupo normal

H es un subgrupo normal de G si $gH = Hg$ para todo $g \in G$

Conjunto cociente

conjunto formado por todas las clases laterales a izquierda

$$G/_H = \{ gH : g \in G \}$$

→ si H es un subgrupo normal entonces $G/_H$ es un grupo con esta operación:

$$(g_1 H) \times (g_2 H) = (g_1 * g_2) H$$

Ejercicio 1. En cada caso, hallar las clases laterales por izquierda y por derecha del subgrupo H en el grupo G, y determinar si H es un subgrupo normal de G.

a. $G = S_3$, el grupo de las permutaciones del conjunto $\{1,2,3\}$, y $H = \langle\sigma\rangle$, el subgrupo generado por la permutación σ, donde $\sigma \in S_3$ es tal que: $\sigma(1) = 2$ y $\sigma(2) = 1$.

b. El grupo aditivo $G = \mathbb{Z}_6$, y el subgrupo $H = \langle\bar{3}\rangle$, generado por la clase $\bar{3} \in \mathbb{Z}_6$.

c. El grupo multiplicativo $G = U_{14}$, y el subgrupo $H = \langle\overline{13}\rangle$.

a) $$S_3 = \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}^{id}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}^{\tau_1}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{\tau_2}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}^{\sigma}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}^{\tau_3}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}^{\tau_4} \right\}$$

$$H = \langle \sigma \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id = e_{S_3}$$

→ clases laterales por izquierda:

$$\tau_1 H = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\tau_1}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{id}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\tau_1}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\sigma} \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\tau_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\tau_3} \right\}$$

$$\tau_3 H = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\tau_3}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{id}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\tau_3}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\sigma} \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\tau_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\tau_1} \right\}$$

$$\tau_2 H = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\tau_2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{id}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\tau_2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\sigma} \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\tau_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\tau_4} \right\} = \tau_4 H$$

$$\mathrm{id}H = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathrm{id}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathrm{id}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathrm{id}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\sigma} \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathrm{id}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\sigma} \right\} = \sigma H$$

las clases laterales por izquierda son:

- $\mathrm{id}H = \sigma H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$
- $\tau_1 H = \tau_3 H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$
- $\tau_2 H = \tau_4 H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

→ clases laterales por derecha

$$H\tau_1 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathrm{id}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\tau_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\tau_1} \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\tau_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\tau_4} \right\} = H\tau_4$$

$$H\tau_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathrm{id}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\tau_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\tau_2} \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\tau_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\tau_3} \right\} = H\tau_3$$

$$H\mathrm{id} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathrm{id}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathrm{id}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathrm{id}} \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathrm{id}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\sigma} \right\} = H\sigma$$

clases laterales por derecha:

$$* \ H\,id = H\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$* \ H\tau_1 = H\tau_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$* \ H\tau_2 = H\tau_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

H subgrupo normal?

$$H\tau_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \Rightarrow \tau_1 H \neq H\tau_1$$

$$\tau_1 H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \Rightarrow H \text{ no es normal}$$

b. El grupo aditivo $G = \mathbb{Z}_6$, y el subgrupo $H = \langle \bar{3} \rangle$, generado por la clase $\bar{3} \in \mathbb{Z}_6$.

$$\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$$

$$H = \langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

$$\bar{3}^2 = \bar{3} + \bar{3} = \bar{0}$$

$$* \ \bar{0}H = \{\bar{0} + \bar{0}, \bar{0} + \bar{3}\} = \{\bar{0}, \bar{3}\} = \bar{3}H$$

$$H\bar{0} = \{\bar{0} + \bar{0}, \bar{3} + \bar{0}\} = \{\bar{0}, \bar{3}\} = \bar{3}H$$

$$* \ \bar{1}H = \{\bar{1} + \bar{0}, \bar{1} + \bar{3}\} = \{\bar{1}, \bar{4}\} = \bar{4}H$$

$$H\bar{1} = \{\bar{0} + \bar{1}, \bar{3} + \bar{1}\} = \{\bar{1}, \bar{4}\} = H\bar{4}$$

$$* \ \bar{2}H = \{\bar{2} + \bar{0}, \bar{2} + \bar{3}\} = \{\bar{2}, \bar{5}\} = \bar{5}H$$

$$H\bar{2} = \{\bar{0} + \bar{2}, \bar{3} + \bar{2}\} = \{\bar{2}, \bar{5}\} = H\bar{5}$$

$\Rightarrow$ $gH = Hg$ para todo $g \in \mathbb{Z}_6$

$\Rightarrow$ H es normal

Ejercicio 2.

a. Sea G un grupo conmutativo. Pruebe que todo subgrupo H de G es normal en G.

b. Pruebe que $H = 3\mathbb{Z}$ es normal en $G = (\mathbb{Z}, +)$. Calcule el grupo cociente $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y su tabla de Cayley.

c. Sea G un grupo cíclico. Pruebe que todo subgrupo H de G es normal en G. Sugerencia: pruebe que G es conmutativo.

d. Pruebe que $H = \{\bar{1}, \bar{8}\}$ es subgrupo normal en $G = U(9)$. Halle el cociente G/H y calcule $(\bar{2}H)(\bar{4}H)$.

a) G grupo conmutativo y H un subgrupo de G

queremos ver que $gH = Hg$ para todo $g \in G$

$gH = \{g * h : h \in H\}$

$= \{h * g : h \in H\}$ porque G es conmutativo $g*h = h*g$ para todo $g, h \in G$

$= Hg$

b) $\mathbb{Z}$ con la suma

$H = 3\mathbb{Z} = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$ multiplos de 3

$\mathbb{Z}$ es abeliano $\Rightarrow$ todos los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son normales

en particular $H = 3\mathbb{Z}$ es normal

$\Rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ es un grupo

clases laterales a izquierda:

$* \; \underbrace{0H}_{\bar{0}} = \{0 + h : h \in 3\mathbb{Z}\} = \{0 + 3n : n \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\ldots -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$

$=$ multiplos de 3

$* \; \underbrace{1H}_{\bar{1}} = \{1 + h : h \in 3\mathbb{Z}\} = \{1 + 3n : n \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\ldots, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$

$=$ enteros que tienen resto 1 al dividir entre 3

$* \; \underbrace{2H}_{\bar{2}} = \{2 + h : h \in 3\mathbb{Z}\} = \{2 + 3n : n \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\ldots, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$

$=$ enteros que tienen resto 2 al dividir entre 3

$\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} = \{0H, 1H, 2H\}$

$\shortparallel$

$\mathbb{Z}_3$

como $3\mathbb{Z}$ es subgrupo normal de $\mathbb{Z}$, el conjunto cociente $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$ es un grupo con la operación

$$\underbrace{(aH) + (bH)}_{\text{suma en } \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}} = \underbrace{(a+b)}_{\text{suma en } \mathbb{Z}}H$$

tabla de Cayley:

+	0H	1H	2H
0H	0H	1H	2H
1H	1H	2H	0H
2H	2H	0H	1H

$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$\bar{0} = 0H$

$\bar{1} = 1H$

$\bar{2} = 2H$

$(0H) + (0H) = (0+0)H = 0H$

0H es el neutro en $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$