Ejercicio 3. En el *Juego del Polinomio* alguien elige (en secreto) un polinomio de coeficientes enteros no negativos, y de cualquier grado. Es decir, un polinomio de la forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \ \underline{a_i \in \mathbb{Z}}, \ \underline{a_i \geq 0}, \ \forall\, i.$$

Nosotros tenemos que adivinar de qué polinomio se trata. Para esto podemos preguntar cuánto vale el polinomio en los valores que consideremos oportunos. El objetivo del juego es adivinar el polinomio con la menor cantidad de preguntas.

a. Consideremos primero una **versión simplificada** del juego, en la que sabemos que los coeficientes cumplen: $0 \leq a_i < 5$, para todo i.

i) Probar que para adivinar el polinomio basta con conocer el valor $p(5)$.

ii) Determinar el polinomio si nos dicen que $p(5) = 89$.

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbb{Z}$

$0 \leq a_i \leq 4$

$0 \leq a_1 \leq 4$

i) $p(5) = \underset{0 \leq a_n \leq 4}{a_n} 5^n + \underset{0 \leq a_{n-1} \leq 4}{a_{n-1}} 5^{n-1} + \ldots + \underset{0 \leq a_2 \leq 4}{a_2} 5^2 + a_1 5^1 + \underset{0 \leq a_0 \leq 4}{a_0} \cdot 5^0$

$p(5) = (a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0)_5$

$\longrightarrow$ los coeficientes del polinomio se corresponden con los "dígitos" de escribir $p(5)$ en base 5

ii) sabemos que $p(5) = 89$

$\rightarrow$ para encontrar el polinomio escribimos 89 en base 5

$$\begin{aligned} 89 &= 5 \cdot 17 + 4 \\ &= 5 \cdot (5 \cdot 3 + 2) + 4 \\ &= 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 \leftarrow \\ &= (324)_5 \end{aligned}$$

$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$p(5) = a_2 5^2 + a_1 5 + a_0$

$p(10) = a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$

entonces $p(x) = 3x^2 + 2x + 4$

b. Consideremos ahora la **versión general** del juego, donde solamente sabemos que los coeficientes son enteros y no negativos.

i) Supongamos que la persona elige el polinomio $p(x) = 2x^2 + 7x + 4$. Notar que $p(5) = 89$. ¿Es suficiente conocer $p(5)$ para adivinar el polinomio p? ¿Qué cambia respecto al caso anterior?

ii) Dar una estrategia que permita adivinar cualquier polinomio, en la menor cantidad de preguntas (evaluaciones). Las preguntas pueden ser todas al mismo tiempo, o de forma secuencial, luego de conocer el resultado de cualquiera de las preguntas anteriores.

i) $p(x) = 2x^2 + 7x + 4$

$p(5) = 2\cdot 5^2 + 7 \cdot 5 + 4$ esto no es $p(5)$ en base 5

$p(x) = 7x^2$

ii) Pregunta 1: con esta pregunta buscamos un entero positivo que sea mayor a todos los coeficientes

$$p(1) = a_n 1^n + a_{n-1} 1^{n-1} + \dots + a_2 1^2 + a_1 1 + a_0$$
$$= a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$$

primer pregunta: cuánto vale $p(1)$?

respuesta: M

$\longrightarrow$ sabemos que $\underbrace{0 \leq a_i < M+1}$

Pregunta 2: cuánto vale $p(M+1)$?

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$p(M+1) = \underset{0 \leq a_n < M+1}{a_n} (M+1)^n + \underset{0 \leq a_{n-1} < M+1}{a_{n-1}} (M+1)^{n-1} + \dots + a_2 (M+1)^2 + a_1 (M+1) + a_0$$

$$p(M+1) = (a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0)_{M+1}$$

Ejercicio 5. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de:

a. la división de $\underbrace{a^2 - 3a + 11}$ por 18.

b. la división de $a^2 + 7$ por 36.

a) como el resto de la división de a por 18 es 5 tenemos

$a = 18q + 5$ con $q \in \mathbb{Z}$

queremos $a^2 - 3a + 11 = 18q' + r$ con $0 \leq r < 18$

$$a^2 - 3a + 11 = (18q + 5)^2 - 3(18q + 5) + 11$$

$$= \underline{18}^2 q^2 + \underline{18}q \cdot 10 + 25 - \underline{18} \cdot 3q - 15 + 11$$

$$= 18(18q^2 + q \cdot 10 - 3q) + \underbrace{21}_{>18}$$

$$= 18(18q^2 + q \cdot 10 - 3q) + 18 + 3$$

$$= 18\underbrace{(18q^2 + q \cdot 10 - 3q + 1)}_{\in \mathbb{Z}} + \underset{\text{resto}}{\underset{\uparrow}{3}}$$

Si $n, m \in \mathbb{Z}$ decimos que m divide a n si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $n = qm$

si m divide a n escribimos $m | n$

si m no divide a n escribimos $m \nmid n$

Ejercicio 6. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Probar o refutar con un contraejemplo las siguientes afirmaciones:

a. Si $a|b$ y $c|d$ entonces $ac|bd$.

b. Si $a|b$ entonces $ac|bc$.

c. Si $a \nmid bc$ entonces $a \nmid b$ y $a \nmid c$.

d. Si $ac|bc$ entonces $a|b$.

e. Si $a|bc$ entonces $a|b$ o $a|c$.

f. Si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$.

g. Si $4|a^2$ entonces $2|a$.

h. Si $9|b+c$ entonces $9|b$ o $9|c$.

i. Si $a+c|b+c$ entonces $a|b$.

a) Si $\underbrace{a|b}_{b=qa}$ y $\underbrace{c|d}_{d=q'c}$ entonces $\underbrace{ac|bd}_{bd=q''ac}$

$a|b \Rightarrow b = qa$ para algún $q \in \mathbb{Z}$

$c|d \Rightarrow d = q'c$ para algún $q' \in \mathbb{Z}$

$bd = qaq'c = \underbrace{qq'}_{\in \mathbb{Z} \text{ porque } q \text{ y } q' \text{ son enteros}}ac \Rightarrow bd = q''ac$ donde $q'' = qq' \in \mathbb{Z}$

entonces $ac | bd$

c) Si $\underbrace{a \nmid bc}_{\text{no existe } q' \in \mathbb{Z} \text{ tal que } bc = q'a}$ entonces $a \nmid b$ y $a \nmid c$

Supongamos por absurdo que $a | b$

entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = qa$

$$\Rightarrow bc = qac = \underbrace{(qc)}_{\in \mathbb{Z}}a$$

$\Rightarrow a | bc$ lo que es absurdo

por lo tanto $a \nmid b$

a) si $ac \mid bc$ entonces $a \mid b$?

$a = 2$, $b = 3$

$c = 5$

* si $c = 0$, $a = 2$, $b = 3$

$ac \mid bc$ se cumple pero $a \nmid b$

* si $\underbrace{c \neq 0}$

$ac \mid bc$ entonces $bc = qac$

como $c \neq 0$ esto implica $b = qa$

entonces $a \mid b$

f) $a \mid c$ y $b \mid c$ entonces $ab \mid c$?

$a = 3$, $b = 9$, $c = 18$

$3 \mid 18$ ✓ $9 \mid 18$ ✓ pero $27 \nmid 18$

i) $a+c \mid b+c$ entonces $a \mid b$?

* si $c = 0$ ✓
* si $c \neq 0$

→ $a = 8$, $b = 20$, $c = 4$

$a+c = 12$
$b+c = 24$ $a+c \mid b+c$ ✓ pero $a \nmid b$

→ $a = 2$, $b = 17$, $c = 1$

$a+c = 3$
$b+c = 18$ $a+c \mid b+c$ pero $a \nmid b$

h) $9 \mid b+c$ entonces $9 \mid b$ o $9 \mid c$?

$b = 7$, $c = 2$

$b + c = 9$

entonces $9 \mid b+c$ pero $9 \nmid b$ y $9 \nmid c$

Ejercicio 10. Sea $n \in \mathbb{N}$ cuya representación en base 10 es $a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$. Demostrar que:

a. $2|n$ si y sólo si $2|a_0$.

b. $4|n$ si y sólo si $4|a_1 a_0$.

c. $8|n$ si y sólo si $8|a_2 a_1 a_0$.

d. Generalizar en base a los casos anteriores.

e. Investigar si 32 divide a 1.273.460.

$(a_1 a_0)_{10}$

$n = (a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_3 a_2 a_1 a_0)_{10}$

$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + a_{k-2} 10^{k-2} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 \cdot 10^0$

a) $2 \mid n$ sii $2 \mid a_0$

$$n = \underbrace{a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1}_{\text{divisible entre } 2} + a_0$$

$$= 10(a_k 10^{k-1} + a_{k-1} 10^{k-2} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0$$

$$= \underbrace{2 \cdot 5 (a_k 10^{k-1} + a_{k-1} 10^{k-2} + \cdots + a_2 10 + a_1)}_{\text{divisible entre } 2} + a_0$$

$2 \mid n$ sii $2 \mid 2 \cdot 5 (a_k 10^{k-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0$

sii $2 \mid a_0$

b) $4 \mid n$ sii $4 \mid a_1 a_0$

$$n = \underbrace{a_k 10^k + \cdots + a_2 10^2}_{\text{divisible entre } 4} + a_1 10 + a_0$$

$$= 100(a_k 10^{k-2} + \cdots + a_3 10 + a_2) + a_1 10 + a_0$$

$$= \underbrace{4 \cdot 25 (a_k 10^{k-2} + \cdots + a_2)}_{} + a_1 10 + a_0$$

$4 \mid n$ sii $4 \mid a_1 10 + a_0$