Ejercicio 8. Sea G un grupo con neutro e. Supongamos que existen elementos $a, b \in G$, tales que: $a \neq e$, $b \neq e$, $a^7 = e$, $b^3 = e$ y $ab = ba^2$. Probar que:

a. G no es conmutativo. **b**. $(ab)^2 = b^2a^6$. **c**. $(ab)^3 = e$.

G grupo con neutro e

tenemos $a, b \in G$ tales que: $a \neq e$

$b \neq e$

$a^7 = e$

$b^3 = e$

$ab = ba^2$

a) G no es conmutativo

Supongamos por absurdo que el grupo es conmutativo

$\Rightarrow ab = ba$

$\Rightarrow ba^2 = ba$

$\Rightarrow baa = ba$

$\Rightarrow b^{-1}baa = b^{-1}ba$

$\Rightarrow aa = a$

$\Rightarrow a^{-1}aa = a^{-1}a$

$\Rightarrow a = e$ Absurdo!

b) Queremos probar que $(ab)^2 = b^2a^6$

$$
\begin{aligned}
(ab)^2 &= (ab)(ab) \\
&= abab \quad \big) \; ab = ba^2 \\
&= ba^2ba^2 \\
&= ba\underbrace{ab}a^2 \\
&= b\underbrace{ab}a^2a^2 \\
&= bba^2a^2a^2 = b^2a^6
\end{aligned}
$$

c) Queremos ver que $(ab)^3 = e$

$$
\begin{aligned}
(ab)^3 &= (ab)^2 ab \\
&= b^2 a^6 ab \\
&= b^2 a^7 b \\
&= b^2 b \quad \text{porque } a^7 = e \\
&= b^3 \\
&= e
\end{aligned}
$$

Grupo de permutaciones

$n \in \mathbb{Z}^+$

$S_n = \{ f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\} : f$ es una función biyectiva$\}$

→ si $n = 2$:

* $Id : \{1,2\} \to \{1,2\}$
* $\tau : \{1,2\} \to \{1,2\}$ $\quad \tau(1) = 2$, $\quad \tau(2) = 1$

→ notación: si $f \in S_n$, la escribimos como una matriz

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{Id}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\tau} \right\}$$

$$S_3 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{Id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

S_n es un grupo con la composición (el neutro es la identidad)

Ejercicio 4

g. $G = S_3$ el grupo de permutaciones de 3 elementos, y $H = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{Id}}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

H es un subgrupo?

① cerrado bajo la operación?

alcanza con ver si $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in H$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in H \checkmark$$

② el neutro está en H?

el neutro de S_3 es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ que es un elemento de H $\checkmark$

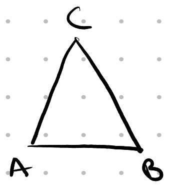
③ cerrado bajo inversos?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in H$$

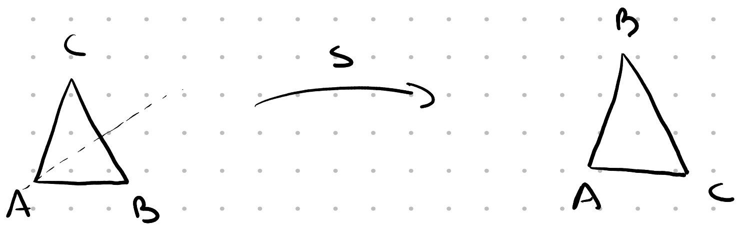
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \text{Id}$$

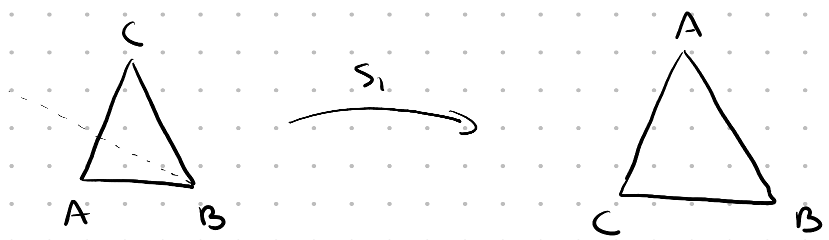
Grupos dihedrales

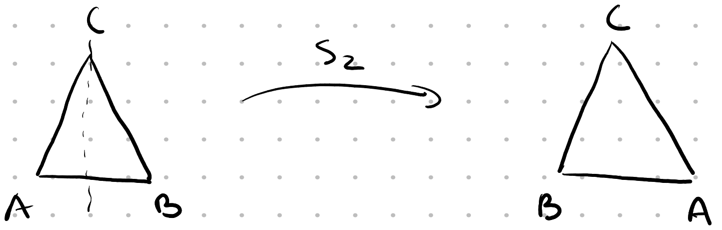
→ vamos a hablar de D_3

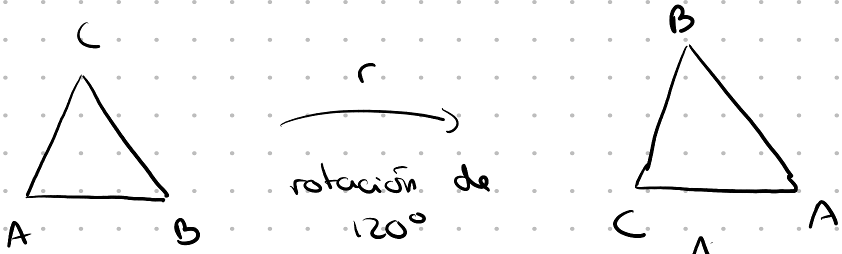


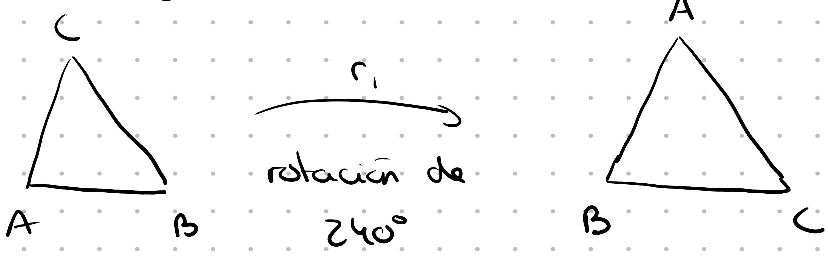
D_3 = conjunto de transformaciones del plano que dejan al triangulo equilatero fijo.



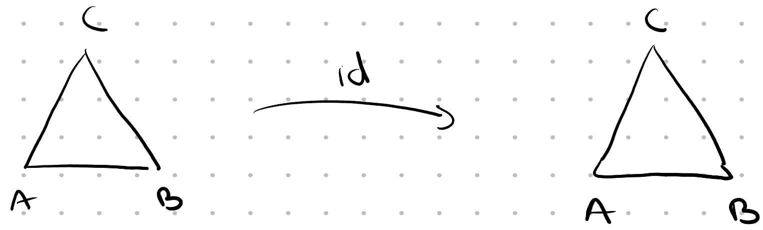








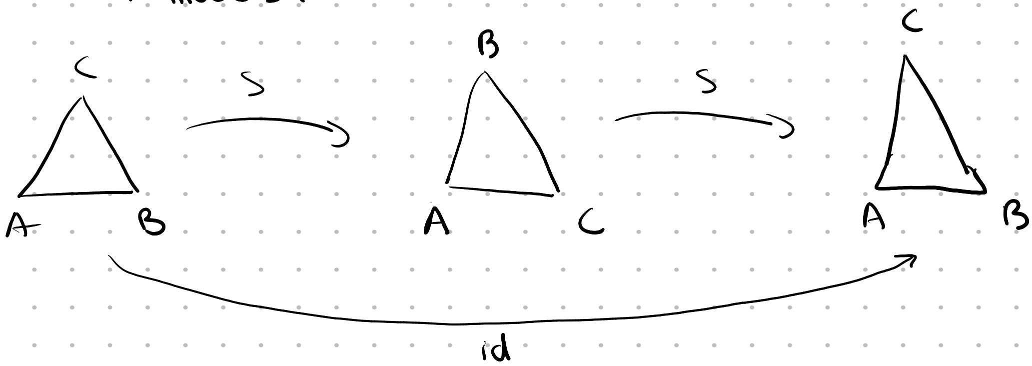
$r_1 = r^2$



$D_3 = \{id, s, s_1, s_2, r, r_1\}$

→ D_3 es un grupo con la composición:

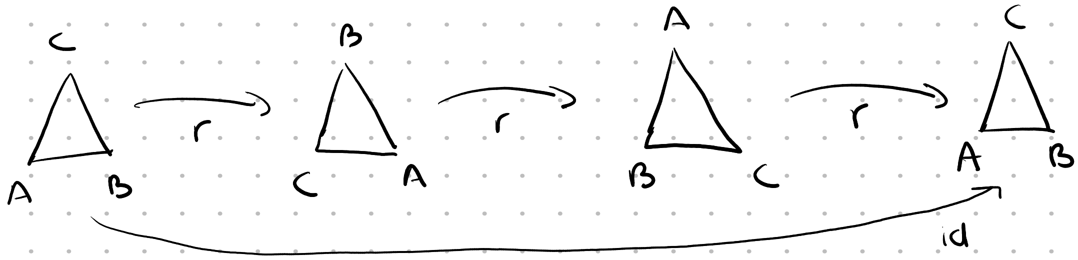
* neutro: id
* inversos:



$s \circ s = id \Rightarrow s^{-1} = s$

análogamentes: $s_1 \circ s_1 = id \Rightarrow s_1^{-1} = s_1$

$s_2 \circ s_2 = id \Rightarrow s_2^{-1} = s_2$



$$r^3 = id \quad \begin{array}{l} \to r^2 \circ r = id \\ \to r \circ r^2 = id \end{array}$$

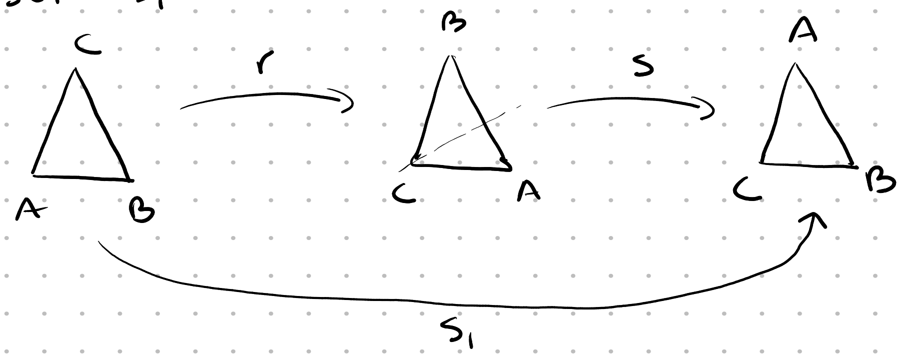
entonces $r^{-1} = r \circ r = r^2$

otra forma de escribir D_3:

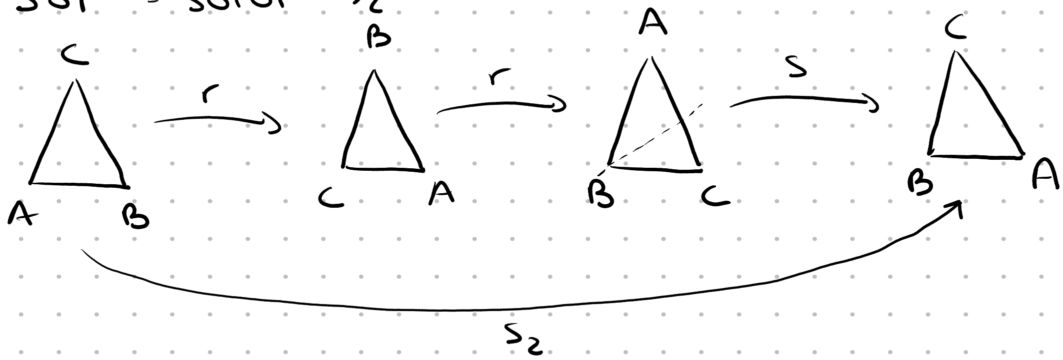
$$D_3 = \{id, s, sr, sr^2, r, r^2\}$$

$r^2 = r_1$ ✓

$s \circ r = s_1$



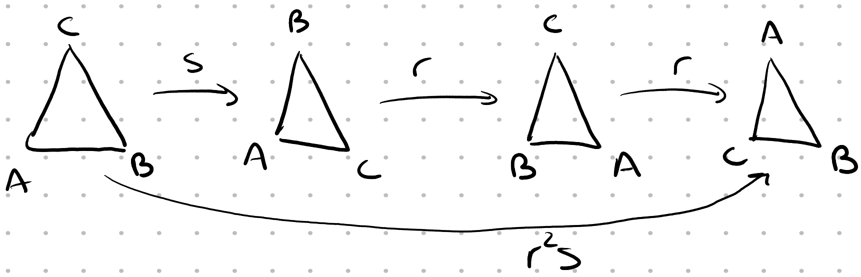
$s \circ r^2 = s \circ r \circ r = s_2$



Ejercicio 4

f. $G = D_3 = \{\text{id}, r, r^2, s, sr, sr^2\}$, el grupo dihedral de un triángulo equilatero, y $H = \{\text{id}, r, \overbrace{r^2}^{sor}s, s\}$.

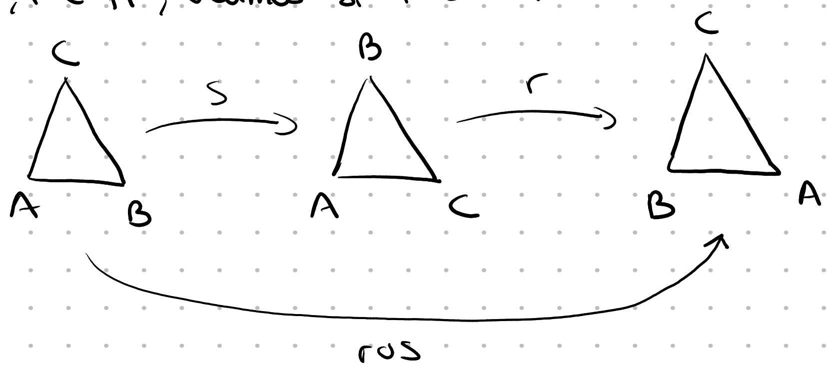
H :



H subgrupo?

① cerrado bajo la operación?

$s, r \in H$, veamos si $r \circ s \in H$



$r \circ s \notin H$ entonces H no es un subgrupo de D_3

Grupo de enteros modulo n

$n = 3$

ser congruentes módulo 3 es una relación de equivalencia podemos considerar las clases de equivalencia

$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod 3\} = \{x \in \mathbb{Z} : x = 3k \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$
$= \{\dots -6, -3, 0, 3, 6 \dots\}$

$\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1 \pmod 3\} = \{x \in \mathbb{Z} : x = 3k + 1 \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$
$= \{\dots, -2, 1, 4, 7 \dots\}$

$\bar{2} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2 \pmod 3\} = \{x \in \mathbb{Z} : x = 3k + 2 \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$
$= \{\dots, -1, 2, 5, 8, \dots\}$

$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$