Ejercicio 3. Sea $(G, \cdot)$ un grupo con neutro e. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, $\forall\, a, b \in G$.

b. $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$, $\forall\, a \in G$, $n \in \mathbb{N}$.

c. Si $gh = e$ o $hg = e$, entonces $h = g^{-1}$.

d. Si $(ab)^3 = e$ entonces $(ba)^3 = e$.

e. Si $xg = xh$ o $gx = hx$, para algún $x \in G$, entonces $g = h$.

a) para ver que $b^{-1}a^{-1}$ es el inverso de ab

* $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$ ✓
* $(b^{-1}a^{-1})(ab) = e$ ✓

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a\underbrace{bb^{-1}}_{e}a^{-1} = aa^{-1} = e$$

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}\underbrace{a^{-1}a}_{e}b = b^{-1}b = e$$

entonces $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

d) Si $(ab)^3 = e$ entonces $\overbrace{(ba)^3}^{bababa\,=\,e} = e$

$$(ab)^3 = e \Rightarrow ababab = e$$

$$\Rightarrow \underbrace{a^{-1}a}_{e}bababa = a^{-1}ea$$

$$\Rightarrow bababa = a^{-1}a$$

$$\Rightarrow (ba)^3 = e$$

b) $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ para todo $a \in G$, $n \in \mathbb{N}$

idea:

$a^n(a^{-1})^n = e$ $\qquad aa^{-1} = e$

$(a^{-1})^n a^n = e$ $\qquad a^{-1}a = e$

$$a^n(a^{-1})^n = \underbrace{aa\cdots a}_{n \text{ veces}}\underbrace{a^{-1}a^{-1}\cdots a^{-1}}_{n \text{ veces}} = \underbrace{aa\cdots a}_{n-1 \text{ veces}}\underbrace{aa^{-1}}\underbrace{a^{-1}\cdots a^{-1}}_{n-1 \text{ veces}} = \cdots = aa^{-1} = e$$

prueba por inducción: $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$

* caso base: si $n = 1$

$$a^{-1} = a^{-1} \checkmark$$

* paso inductivo: suponemos que vale para algún $k \in \mathbb{N}$ y probamos que vale para $k+1$

hipótesis: $(a^k)^{-1} = (a^{-1})^k$ $\qquad$ $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

tesis: $(a^{k+1})^{-1} = (a^{-1})^{k+1}$ $\qquad$ $(aa^k)^{-1} = (a^k)^{-1}a^{-1}$

$$(a^k)^{-1} = (a^{-1})^k \Rightarrow (a^k)^{-1}a^{-1} = (a^{-1})^k a^{-1}$$
$$\Rightarrow (aa^k)^{-1} = (a^{-1})^{k+1}$$
$$\Rightarrow (a^{k+1})^{-1} = (a^{-1})^{k+1}$$

Subgrupos:

Dado un grupo $(G, *, e_G)$ un subconjunto $H \subset G$ es un subgrupo de G si verifica:

1. cerrado bajo la operación: $h, h' \in H \Rightarrow h * h' \in H$
2. el neutro está en H: $e_G \in H$
3. cerrado bajo inversos: $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$

Ejercicio 4. Para cada uno de los grupos G, investigar si H es un subgrupo de G:

a. $G = (\mathbb{Z}, +)$ y $H = n\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros múltiplos de n (para $n \in \mathbb{Z}$ dado).

$G = \mathbb{Z}$ con la suma de enteros

$H = n\mathbb{Z} = \{nq : q \in \mathbb{Z}\}$ $\quad$ $n \in \mathbb{Z}$ fijo

H es subgrupo de G?

1. cerrado bajo la operación del grupo (la suma)

sean $h, h' \in n\mathbb{Z}$, queremos ver si $h + h' \in n\mathbb{Z}$

$h = nq$ para algún $q \in \mathbb{Z}$

$h' = nq'$ para algún $q' \in \mathbb{Z}$

$h + h' = nq + nq' = n\underbrace{(q+q')}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow h + h'$ es múltiplo de n

$\Rightarrow h + h' \in n\mathbb{Z}$

2. el neutro está en $n\mathbb{Z}$

$e_G = 0 = n \cdot 0 \in n\mathbb{Z}$

3. cerrado bajo inversos:

sea $h \in n\mathbb{Z}$, queremos ver que su inverso está en $n\mathbb{Z}$

$h = nq$ para algún $q \in \mathbb{Z}$

el inverso de h es:

$$-h = -nq = n(-q) \in n\mathbb{Z}$$

entonces $n\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}$.

c. $G = GL_2(\mathbb{R})$ (matrices invertibles 2×2 con coeficientes reales) con el producto usual de matrices y $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : ac \neq 0 \right\}$.

① cerrado bajo la operación:

sean $A, B \in H$, queremos ver si $AB \in H$

$$\underbrace{A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}}_{ac \neq 0}, \quad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \to a'c' \neq 0$$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \in H$$

$$aa'cc' = aca'c' \neq 0$$

② el neutro está en H:

$$e_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

③ cerrado bajo inversos:

sea $A \in H$, queremos ver si $A^{-1} \in H$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} a & b \\ 0 & c \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \longrightarrow \left(\begin{matrix} a & b \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/c \end{matrix}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{matrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & -b/c \\ 0 & 1/c \end{matrix}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1/a & -b/ac \\ 0 & 1/c \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/ac \\ 0 & 1/c \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \in H.$$

e. $G = \mathbb{Q}^+$ con el producto y $H = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a \equiv 0 \pmod 7,\ \operatorname{mcd}(b,7) = 1 \right\}$.

① cerrado bajo el producto:

sean $h, h' \in H$, queremos ver si $hh' \in H$

$h = \frac{a}{b}$ con $a \equiv 0 \pmod 7$, $\operatorname{mcd}(b,7) = 1$

$h' = \frac{a'}{b'}$ con $a' \equiv 0 \pmod 7$, $\operatorname{mcd}(b',7) = 1$

$hh' = \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$

$*$ $\left.\begin{array}{l} a \equiv 0 \pmod 7 \\ a' \equiv 0 \pmod 7 \end{array}\right\} \Rightarrow aa' \equiv 0 \pmod 7$ ✓

$*$ $\left.\begin{array}{l} \operatorname{mcd}(b,7) = 1 \\ \operatorname{mcd}(b',7) = 1 \\ 7 \text{ es primo} \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{mcd}(bb',7) = 1$

entonces $hh' \in H$

② el neutro está en H.

$e_G = \frac{1}{1}$

como $1 \not\equiv 0 \pmod 7$ tenemos que $\frac{1}{1} \notin H$

entonces H no es un subgrupo.

<u>Grupos abelianos</u>

Sea $(G, *, e)$ un grupo.

Decimos que G es abeliano si $a * b = b * a$ para todo $a, b \in G$

- $(\mathbb{Z}, +)$ es abeliano
- $GL_n(\mathbb{R})$ con el producto de matrices no es abeliano

Ejercicio 6. Sea $(G, \cdot)$ un grupo con neutro e. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, $\forall\, a, b \in G \Leftrightarrow G$ es abeliano. **b**. $(ab)^2 = a^2b^2$, $\forall\, a, b \in G \Leftrightarrow G$ es abeliano.

b) $(ab)^2 = \underbrace{a^2b^2}_{aabb}$ para todo $a,b \in G \iff G$ es abeliano

$(\Leftarrow)$ G es abeliano

sean $a,b \in G$

$$(ab)^2 = abab \underset{\uparrow}{=} aabb = a^2b^2$$

como G es abeliano:
$ba = ab$

$(\Rightarrow)$ sean $a,b \in G$, queremos ver que $ab = ba$

$$(ab)^2 = a^2b^2 \Rightarrow abab = aabb$$
$$\Rightarrow a^{-1}ababb^{-1} = a^{-1}aabbb^{-1}$$
$$\Rightarrow ba = ab$$

Ejercicio 7. Sea G un grupo abeliano. Probar que H es un subgrupo de G para los siguientes casos:

a. $H = \{a \in G : a^2 = e_G\}$. **b**. $H = \{a^n : a \in G\}$ con n un entero positivo dado.

G grupo abeliano

a) $H = \{a \in G : a^2 = e_G\}$

① cerrado bajo la operación

Sean $a,b \in H$, queremos ver si $\underbrace{ab \in H}_{}$

$a \in H \Rightarrow a^2 = e_G$ $\qquad (ab)^2 = e_G$?

$b \in H \Rightarrow b^2 = e_G$

$$(ab)^2 \underset{\uparrow}{=} a^2b^2 = e_Ge_G = e_G \Rightarrow ab \in H$$

G es abeliano

② neutro está en H:

$$e_G^2 = e_Ge_G = e_G \Rightarrow e_G \in H$$

③ cerrado bajo inversos:

sea $a \in H$, queremos ver que $a^{-1} \in H$

$a \in H \Rightarrow a^2 = e_G$

$\Rightarrow aa = e_G$

$\Rightarrow a^{-1} = a$

$\Rightarrow a^{-1} \in H$

b) n un entero fijo

$H = \{a^n : a \in G\}$

$= \{x \in G : \text{existe } a \in G \text{ tal que } x = a^n\}$

① cerrado bajo la operación:

sean $x, y \in H$, queremos ver que $xy \in H$

$x \in H \Rightarrow x = a^n$ para algún $a \in G$

$y \in H \Rightarrow y = b^n$ para algún $b \in G$

$$xy = a^n b^n = \underbrace{aa \cdots a}_{n \text{ veces}}\underbrace{bb \cdots b}_{n \text{ veces}}$$

$$= \underbrace{ab\,ab \cdots ab}_{n \text{ veces}} \leftarrow G \text{ es abeliano}$$

$$= (ab)^n \leftarrow ab \in G$$

entonces $xy \in H$

② el neutro está en H?

$e_G = e_G^n \Rightarrow e_G \in H$

③ cerrado bajo inversos:

sea $x \in H$, queremos ver que $x^{-1} \in H$

$x \in H \Rightarrow x = a^n$ para algún $a \in G$

$x^{-1} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$

$\Rightarrow x^{-1} \in H$