Grupos

Un grupo es un conjunto G junto con una operacion $* : G \times G \longrightarrow G$ tal que:

- la operación es asociativa: $x*(y*z) = (x*y)*z$
- existencia de un neutro: existe un elemento $e \in G$ tal que

$$e*x = x*e = x \quad \text{para todo } x \in G$$

- existencia de inversos: para todo $x \in G$ existe un elemento $x^{-1} \in G$ tal que

$$x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$$

ejemplos:

- $(\mathbb{Z}, +)$: la suma es asociativa
  0 es el neutro de la suma : $n+0 = 0+n = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$
  inversos: el inverso de n es $-n$ $\quad n+(-n) = (-n)+n = 0$
  $(\mathbb{Z},+)$ es un grupo

- $(\mathbb{Z}, \times)$: el producto es asociativo
  1 es el neutro del producto
  pero no todos los elementos tienen inverso $\hookrightarrow$ no existe $\overset{\in\mathbb{Z}}{n}$ tq $n \cdot 0 = 1$
  $\Rightarrow (\mathbb{Z}, \times)$ no es un grupo $\qquad$ no existe $\overset{\in\mathbb{Z}}{n}$ tq $n \cdot 3 = 1$

- $(\mathbb{R}, \times)$: el producto es asociativo
  1 es el neutro del producto
  el unico real que no tiene inverso es 0
  $\Rightarrow (\mathbb{R}, \times)$ no es un grupo

- si $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
  $\Rightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$ es un grupo

Ejercicio 1. En cada uno de los siguientes casos, investigar si el conjunto y la operación forman un grupo.

a. El conjunto $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con el producto usual de matrices: $A * B = AB$.

b. El conjunto $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con la operación: $A * B = AB + BA$.

c. El conjunto $\mathbb{R}^2$ con la operación: $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_1 + y_2)$.

d. $G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ con el producto usual de matrices.

e. El conjunto $\{a, b, c\}$, con la operación $*$ definida mediante la tabla:

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

f. El conjunto $\{a, b, c, d\}$, con la operación $*$ definida mediante la tabla:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	a	a
c	c	a	b	b
d	d	a	b	c

.

g. El conjunto $\mathbb{Z}$ con la operación $\otimes$ definida por: $a \otimes b = ab - 2(a + b) + 6$.

a) $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con el producto usual de matrices: $A * B = AB$

① la operación es asociativa?

$A(BC) = (AB)C$ ✓

② neutro? la matriz identidad es el neutro

$AI = IA = A$ para toda $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

③ inversos? no toda matriz tiene inverso

si $\det(A) = 0 \Rightarrow$ no existe la inversa de A

$\Rightarrow M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con el producto no es un grupo

$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$

$GL_n(\mathbb{R})$ con el producto usual de matrices es un grupo

d) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ con el producto usual de matrices

① la operación es asociativa?

se cumple porque el producto de matrices es asociativo

② neutro?

el neutro de producto es la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad (\text{tomando } a = b = c = 0)$$

③ inversos?

si $A \in G$ entonces $\det(A) = 1$ y por lo tanto A es invertible

falta ver que $A^{-1} \in G$

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & -c\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -b\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix}1 & -a & ab-c\\ 0 & 1 & -b\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{A^{-1}}\end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \overset{\in \mathbb{Z}}{\boxed{-a}} & \overset{\in \mathbb{Z}}{\boxed{ab-c}} \\ 0 & 1 & \boxed{-b} \in \mathbb{Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A^{-1} \in G$

entonces G es un grupo

e. El conjunto $\{a, b, c\}$, con la operación $*$ definida mediante la tabla:

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	$\boxed{a}$
c	$\boxed{c}$	a	b

$b * c$

$c * a$

① la operación es asociativa? si

- $(a*b)*c \overset{?}{=} a*(b*c)$

  $b*c \overset{?}{=} a*a$

  $a = a$ ✓

- $(a*c)*b \overset{?}{=} a*(c*b)$

  $c*b \overset{?}{=} a*a$

  $a = a$ ✓

- $(b*a)*c \overset{?}{=} b*(a*c)$

  $b*c \overset{?}{=} b*c$ ✓

- $(b*c)*a = b*(c*a)$

  $a*a \overset{?}{=} b*c$

  $a = a$ ✓

- $(c*a)*b \overset{?}{=} c*(a*b)$

  $c*b = c*b$ ✓

- $(c*b)*a \overset{?}{=} c*(b*a)$

  $a*a \overset{?}{=} c*b$

  $a = a$ ✓

② neutro? el neutro es a

$a * a = a$ ✓

$a * b = b * a = b$ ✓

$a * c = c * a = c$ ✓

③ inversos?

a es inverso de a : $a * a = a$

$b * c = c * b = a$ que es el neutro

$\Rightarrow$ b es el inverso de c y c es el inverso de b

entonces G es un grupo

si G es un grupo finito podemos definir su operación mediante una tabla (tabla de Cayley)

→ propiedad sudoku: cada elemento del grupo aparece una única vez en cada fila y en cada columna
es decir cada fila es una permutación de los elementos del grupo y cada columna también

f. El conjunto $\{a, b, c, d\}$, con la operación $*$ definida mediante la tabla:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	a	a
c	c	a	b	b
d	d	a	b	c

← falla la propiedad sudoku

$$(b * c) * d \overset{?}{=} b * (c * d)$$

$$a * d \overset{?}{=} b * b$$

$$d = c$$

absurdo!

entonces la operación $*$ no es asociativa

$\Rightarrow \{a, b, c, d\}$ con $*$ no es un grupo

g. El conjunto $\mathbb{Z}$ con la operación $\otimes$ definida por: $a \otimes b = ab - 2(a+b) + 6$.

① asociatividad?

$$(a \otimes b) \otimes c \overset{?}{=} a \otimes (b \otimes c)$$

$$(a \otimes b) \otimes c = (ab - 2(a+b) + 6) \otimes c$$
$$= (ab - 2(a+b) + 6)c - 2(ab - 2(a+b) + 6 + c) + 6$$
$$= abc - 2(a+b)c + 6c - 2ab - 4(a+b) - 12 - 2c + 6$$

② neutro? buscamos $e \in \mathbb{Z}$ tal que $x \otimes e = e \otimes x = x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$

$$x \otimes e = x \Rightarrow xe - 2(x+e) + 6 = x$$
$$\Rightarrow xe - 2x - 2e + 6 = x$$
$$\Rightarrow e(x-2) = 3x - 6$$
$$\Rightarrow e = \frac{3x-6}{x-2} = \frac{3(x-2)}{x-2} = 3 \quad \Rightarrow \boxed{e = 3}$$

$$3 \otimes x = 3x - 2(3+x) + 6 = 3x - 6 - 2x + 6 = x$$

$\Rightarrow$ el neutro es 3 $\qquad a \otimes b = ab - 2(a+b) + 6$

③ inversos? sea $x \in \mathbb{Z}$ buscamos x^{-1} tal que $x \otimes x^{-1} = x^{-1} \otimes x = \overset{\substack{\text{neutro} \\ \downarrow}}{3}$

$$x \otimes x^{-1} = 3$$
$$x x^{-1} - 2(x + x^{-1}) + 6 = 3$$
$$x x^{-1} - 2x - 2x^{-1} + 6 = 3$$
$$x^{-1}(x-2) = 2x - 3$$
$$\Rightarrow x^{-1} = \frac{2x-3}{x-2} \qquad \Rightarrow 2 \text{ no tiene inverso}$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}$ con $\otimes$ no es un grupo.

Ejercicio 2

Completar la tabla de Cayley

b. $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ con tabla de Cayley parcial:

·	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	d	f	c
b	b	e	a	f	c	d
c	c	f	d	e	b	a
d	d	c	f	a	e	b
f	f	d	c	b	a	e

$a * b = e$

$\Rightarrow b * a = e$

→ mirando la columna las posibilidades son c y e pero e ya aparece en la fila

$f \cdot f = e$

$f \cdot c = b \Rightarrow \overbrace{f \cdot f}^{e} \cdot c = f \cdot b$

$\Rightarrow c = f \cdot b$